МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ №1

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Числови множества. Аритметични действия. Алгебрични преобразувания.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

1 Числови множества. Аритметични действия. Алгебрични преобразувания

1.1 Множества на естествените, целите, рационалните и реалните числа

Естествените числа са тези, с които броим: $1, 2, 3, \ldots$, т.е. цели положителни числа. Множеството на естествените числа означаваме с $\mathbb{N}$. В множеството на естествените числа винаги са възможни действията събиране и умножение, но не винаги е възможно да се извърши изваждане и деление.

Първото разширение на това множество се получава с въвеждането на нулата и отрицателните числа. Така се получава множеството на целите числа:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

В това множество винаги са възможни операциите: събиране, умножение и изваждане. Не винаги е възможно действието деление.

Разширението на множеството на целите числа, така че да е възможно винаги и действието деление е с въвеждане на дробните числа (напр. $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{12}{3}, 0, 12$). Така се получава множеството на рационалните числа, което се означава с $\mathbb{Q}$. То съдържа, всички цели и дробни числа.

Да припомним, че не е възможно деление на нула.

В множеството на рационалните числа не винаги е възможно действието коренуване. За да е възможно коренуването, се въвеждат ирационалните числа (напр. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2,1}$). Така се допълва числовото множество до множеството на всички реални числа, което означаваме с $\mathbb{R}$.

1.2 Аритметични действия с реални числа. Ред на действията. Пресмятане на аритметични изрази

1.2.1 Аритметични действия

В множеството на реалните числа са възможни винаги действията: събиране, изваждане, умножение, деление (без деление на 0), коренуване на положителните числа и нулата с четен корен и коренуване на всички числа с нечетен корен.

Знаците за аритметичните действия са: $+$ - събиране; $-$ - изваждане; . или $\times$ - умножение; : или / - деление.

$$8 + 11 = 19, \quad 3 - 2 = 1, \quad 5.4 = 20, \quad 5 \times 4 = 20, \quad 45 : 9 = 5, \quad 45/9 = 5$$

Действието степенуване се определя като умножение на краен брой равни множители. Така

$$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32, 3^4 = 3.3.3.3 = 81, 0^5 = 0.0.0.0.0 = 0$$

При умножение на число с 0 се получава 0. $0.12 = 0$

При умножение на реално число с единица се получава същото реално число. $(2,23 \times 1 = 2,23)$.

При разместване на местата на двата множителя произведението не се променя. $5.6 = 30$, и $6.5 = 30$.

При разместване на местата на събираемите сбора не се изменя. $5 + 4 = 9$ и $4 + 5 = 9$.

1.2.2 Аритметични изрази. Ред на действията. Скоби

Редът за извършване на аритметичните действия в един аритметичен израз става така:

С най-висок приоритет е действието степенуване, след това са умножение и деление и най-накрая са събиране и изваждане.

Това означава, че ако в един аритметичен израз има няколко степенувания, най-напред се извършват те и се заместват с получените числа.

След това, ако има умножения и деления, те се извършват едно по едно от ляво на дясно и се заместват с получените числа.

Накрая се извършват събиранията и изважданията, пак от ляво на дясно, докато се получи едно число.

$$\begin{aligned}
&2^3 : 4 + 3^3 - 25 : 5 + 32 : 8 \\
&= 8 : 4 + 27 - 25 : 5 + 32 : 8 \\
&= 2 + 27 - 5 + 4 \\
&= 29 - 5 + 4 \\
&= 24 + 4 = 28
\end{aligned}$$

За даване на приоритет на едно действие пред друго се използват скоби. Ако в един аритметичен израз има скоби, то най-напред се извършват действията в най-вътрешните скоби (в реда описан по-нагоре) след това в следващите и т.н.

$$(4 - 3).12 - 13 : (25 - 23) = 1.12 - 13 : 2 = 12 - 6,5 = 5,5$$

1.2.3 Действия с числа със знаци

- събиране: При събиране на числа с еднакви знаци се събират числата и се пише същия знак:

$$5 + 4 + 6 = 9 + 6 = 15, \quad -5 - 4 - 6 = -9 - 6 = -15.$$

При събиране на числа с различни знаци от по-голямото число изваждаме по-малкото и пишем знака на по голямото:

$$-5 + 2 = -3, \quad 6 - 4 = 2.$$

- умножение и деление: При умножение и деление на числа с еднакви знаци се получава положително число, пише се знак $+$,

$$5.4 = 20, \quad (-5).(-8) = 40, 21 : 3 = 7, \quad (-24) : (-3) = 8.$$

При умножение и деление на числа с различни знаци се получава отрицателно число, пишем знак -,

$$5.(-3) = -15, \quad -4.7 = -28, \quad -34 : 2 = -17, \quad 25 : (-5) = -5.$$

1.2.4 Действия с обикновени дроби

Обикновени дроби с еднакви знаменатели се събират като се съберат числителите и полученото число пишем за числител, а знаменателя остава същия.

$$\frac{7}{13} + \frac{11}{13} = \frac{7+11}{13} = \frac{18}{13}.$$

Обикновени дроби с различни знаменатели се събират като се приведат под общ знаменател и след това се събират като дроби с еднакви знаменатели.

$$\underbrace{\frac{11}{4} + \frac{1}{7}}_{28} = \frac{77}{28} + \frac{4}{28} = \frac{81}{28}.$$

Обикновени дроби се умножават като се умножат числителите и полученото се пише за числител, умножат се знаменателите и полученото се пише за знаменател.

$$\frac{10}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{10.2}{3.7} = \frac{20}{21}.$$

Обикновени дроби се делят като се умножи делимото с реципрочната дроб на делителя по правилото за умножение.

$$\frac{10}{3} : \frac{5}{7} = \frac{10}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{10.7}{3.5} = \frac{2.7}{3.1} = \frac{14}{3}.$$

1.3 Наредба. Числова ос. Интервали

Множеството на реалните числа е наредено. Това означава, че за всеки две реални числа a и b, е в сила едно и само едно от следните съотношения

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Това позволява да се установи взаимно еднозначно съответствие между реалните числа и точките на една права, която наричаме числова ос. С помощта на числовата ос се дава нагледна представа за наредбата на множеството на реалните числа.

Нека $a < b$ са две реални числа.

Всички реални числа x, за които е в сила неравенството:

$a \le x \le b$ образуват затворения интервал с краища a, b. Означава се с $[a, b]$.

$a < x \le b$ образуват полуотворения интервал с краища a, b. Означава се с $(a, b]$.

$a \le x < b$ образуват полуотворения интервал с краища a, b. Означава се с $[a, b)$.

$a < x < b$ образуват отворения интервал с краища a, b. Означава се с (a, b).

Примери:

$[2, 5]$ съдържа всички числа, които са между 2 и 5 включително.

$(2, 5]$ съдържа всички числа, които са между 2 и 5, без 2.

$[2, 5)$ съдържа всички числа, които са между 2 и 5, без 5.

$(2, 5)$ съдържа всички числа, които са между 2 и 5, без 2 и 5.

Въвеждат се символите $-\infty$ и ∞ и с тях се задават безкрайни интервали.

Ако a е реално число, с $[a, \infty)$ се означават всички реални числа x, които са $x \ge a$, с $(-\infty, a]$ означаваме всички числа x, които са $x \le a$.

Често се използва означението $(-\infty, \infty)$ за всички реални числа, т.е. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Абсолютна стойност. За всяко реално число a се определя абсолютната му стойност, която се означава с $|a|$, така:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Примери. $|56| = 56, \quad |0| = 0, \quad |-23,2| = 23,2.$

1.4 Алгебрични преобразувания на цели и дробни алгебрични изрази

Алгебричен израз е израз, в който участват букви и числа свързани със знаците за аритметични действия. Алгебричен израз, в който участва само действие умножение се нарича едночлен. Сбор от едночлени се нарича многочлен (полином). Частно на многочлени се нарича дробен алгебричен израз или алгебрична дроб.

Примери:

едночлени: $x^3, \quad 5xy^4, \quad 2,45abc,$

многочлени $4x^3 - 2x + 5xy^2, \quad 3ab + 2a^2c^3 - x,$

дроби $\dfrac{2x^2 - x + 1}{x^3 + y - 4z}, \quad \dfrac{2z^3}{5y^2 + x}.$

Подобни едночлени наричаме едночлени с еднакви буквени части. Подобните едночлени се събират като се съберат числата (коефициентите), а буквената част си остава същата.

Примери:

$$(4x^2 - 2x + 3) + (5x^3 - 3x^2 - 2) = 5x^3 + (4x^2 - 3x^2) - 2x + (3 - 2) = 5x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

1.5 Разлагане на множители. Съкращаване на дроби

При разлагането на многочлен на множители използваме няколко начина: Изнасяне на общ множител; групиране и изнасяне на общи множители; формули за съкратено умножение. Ето няколко примера.

$$ax + by + ay + bx = (ax + bx) + (ay + by) = (a + b).x + (a + b).y = (a + b)(x + y)$$

$$\begin{gathered}
x^2 - 4x + 4 - y^2 - 6y - 9 \\
= (x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 6y + 9) \\
= (x - 2)^2 - (y + 3)^2 \\
= [(x - 2) - (y + 3)][(x - 2) + (y + 3)] \\
= [x - 2 - y - 3][x - 2 + y + 3] \\
= [x - y - 5][x + y + 1].
\end{gathered}$$

Формули за съкратено умножение

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

1.6 Решаване на линейни и квадратни уравнения

1.6.1 Линейно уравнение

Уравнението $ax = b$ се нарича уравнение от първа степен или линейно уравнение.

Решаване на линейно уравнение:

а) Ако $a \neq 0$, то уравнението има единствено решение $x = \frac{b}{a}$;

б) Ако $a = 0$, т.е. уравнението има вида $0.x = b$:

б1) Ако освен това $b \neq 0$, то уравнението няма решение;

б2) Ако освен това $b = 0$, то уравнението има вида $0.x = 0$ и всяко реално число е решение на уравнението.

Примери. $4x = 20$, $x = \frac{20}{4} = 5$; $0.x = 2$ няма решение; $0.x = 0$ всяко x е решение.

1.6.2 Квадратно уравнение

Уравнение от вида $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ се нарича квадратно уравнение.

Решаване на пълно квадратно уравнение: $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$. Пресмятаме дискриминантата $D = b^2 - 4ac$.

а) Ако $D > 0$ решенията са $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2.a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2.a}$;

б) Ако $D = 0$ решенията са $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2.a}$;

в) Ако $D < 0$ уравнението няма реални корени.

Примери: $x^2 - 4x + 3 = 0$. $D = 4^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4 > 0$,

$x_1 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{4}}{2.1} = \dfrac{4 - 2}{2} = \dfrac{2}{1} = 1$; $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2.1} = \dfrac{4 + 2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

$x^2 - 4x + 4 = 0$. $D = 4^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$,

$x_1 = x_2 = \dfrac{-(-4)}{2.1} = 2$.

$x^2 - 3x + 4 = 0$. $D = 3^2 - 4.1.4 = 9 - 16 = -7 < 0$, следователно уравнението няма реални корени.

Непълни квадратни уравнения:

а) Ако $b = 0$, то $ax^2 + c = 0$. Тогава представяме $x^2 = -\frac{c}{a}$. Ако $-\frac{c}{a} > 0$ уравнението има 2 реални корена $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. Ако $-\frac{c}{a} < 0$ уравнението няма реални корени.

Примери: $4x^2 - 12 = 0$. $x^2 = \frac{12}{4} = 3 > 0$. Следователно $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

$x^2 + 9 = 0$. $x^2 = -9 < 0$. Уравнението няма реални корени.

б) Ако $c = 0$ уравнението има вида $ax^2 + bx = 0$. Изнасяме x пред скоби и намираме корените. $x(ax + b) = 0$, $x_1 = 0, x_2 = \frac{-b}{a}$.

Пример: $3x^2 + 8x = 0$, $x(3x + 8) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$.

1.7 Задачи

1. Пресметнете аритметичните изрази:

а) $5 + 24 - 3.12$, $2^3 - 3^2 + (8 - 5).(7 + 2)$, $(-2 + 3).(-5 + 12) - 4^2$, $5^3 + (-2)^5 - (-3)^3$, $2^3.(-2)^2 + 3^2.(-3)^3 + 15$.

б) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{9} + 8, 2$, $(2, 45 - 3, 21).2, 1$, $3, 1 - 2.2, 3 + 4, 4$, $\frac{4}{5} : \frac{1}{10} + \frac{1}{3}.\frac{3}{7}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$.

в) $(2, 1 - 3\dfrac{1}{5}).\dfrac{2}{5} - 3$, $\dfrac{2, 1 - 3, 2}{12 - 10}.2, 5$, $-\dfrac{5}{8}.(\dfrac{2}{5}) + 4$.

г) $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{23})^2 - (\sqrt{6})^4$, $\sqrt{5}^2 + \sqrt{6}^4 - (2\sqrt{2})^2$.

2. Внесли сте 1500 лева при 4% годишна лихва. Колко лева лихва ще получите е края на годината?

3. Имаме 10 литра чист спирт и 40 литра чиста вода. Смесваме ги. Колко процентен е получения спиртен разтвор?

4. Извършете действията:

а) $5x^2 - 3x^2 + x^3$, $2xy^2 - 3y^2x + 4xy$, $(2xy).(3xy^2) - 6x^2y^3$.

б) $\dfrac{3xy^4}{6x^2y}$, $\dfrac{x}{y} : \dfrac{y}{x}$, $(x+y^2).(x-y^2)$

в) $(2x^2+3x+1).(2x-3)$, $-2x.(4x^3-5x-1)$, $11.(x^2-x^3+3x)$.

5. Разложете на прости множители:

а) $2x+4x^2-8x^3$, $ax+bx+cx$, $ax+ay+bx+by$.

б) a^2-b^2, a^2-4, $x2-4y^2$, v^2-1.

в) $c^2-4+c-2$, $x^2-2xy+y^2$, x^2-2x+1.

6. Подредете числата по големина:

а) $\frac{3}{5}$, $0,7$, $\frac{15}{24}$.

б) $\sqrt{2}$, $1,4$, $1,3$.

в) $(0,4-1)^2$, $-0,3$, $0,4$.

7. Решете уравненията:

а) $5x=10$, $-3,2x=-9,6$, $(2x-3)(3x-2)-6x^2-5x=24$, $(2x-3)^2-(2x-1)(2x-5)=3x-14$.

б) $\frac{1}{2}x=2$, $-\frac{3}{4}x-5=0$, $7x-b^2=0$, $(-x-5)^2=x^2$, $3x-(x-\frac{1}{2})^2=x(4-x)$.

в) $x^2-4x+3=0$, $x^2-4=0$, $x^2+9=0$, $x^3=-8$, $x^2-3x+2=0$, $x^2-15x+26=0$, $3x^2-4x=0$, $2x^2-8=0$.

8. Решете неравенствата:

а) $5x>10$, $-5x<20$, $-3x\geq 4$, $12x\leq -3$.

б) $x^2-5x+6\geq 0$, $4x^2-4x+1>0$, $4x^2-16\leq 0$, $3x^2+9<0$.

9. Определете дефиниционното множество на израза: $\sqrt{x^2-7x+6}$, $\frac{2}{\sqrt{5-x}}$, $\sqrt[3]{x^2-4}$.