МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 10

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Неопределен интеграл.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

10 Неопределен интеграл

Да припомним, че за функция f дефинирана в отворения интервал $I \subset \mathbb{R}$ производната $f'(x)$ в точка $x \in I$ се дефинира с

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Диференциал на f се нарича изразът

$$df = f'(x)dx$$

където dx е нарастването на аргумента x.

Ние изучихме как да използуваме производната, за да изследваме функцията и да начертаем нейната графика. Сега ще изучим обратния въпрос: Ако ни е дадена една функция f, как да намерим друга функция F такава, че да е в сила $F'(x) = f(x)$ за $x \in I$. Този въпрос и други въпроси от по-общ характер, водещи до диференциални уравнения от различни видове, се срещат често в много различни области на математиката и другите науки.

10.1 Неопределен интеграл

Дефиниция 1. *Ако $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in I$, тогава функцията F се нарича примитивна функция на f в интервала I.*

Поради това, че производната на константа е равна на 0, то е в сила следното твърдение:

Теорема 1. *Ако $F(x)$ е една примитивна на $f(x)$ $x \in I \subset \mathbb{R}$, то и всяка функция $F(x) + C$ където C е константа, също ще е примитивна на $f(x)$. Всички примитивни на $f(x)$ са функциите от вида $F(x)+C$, където C е произволна константа.*

Дефиниция 2. *Множеството от всички примитивни на дадена функция $f(x)$ се нарича неопределен интеграл на тази функция и се означава с*

$$\int f(x)dx.$$

Това означение се чете така: неопределен интеграл от $f(x)dx$.

Непосредствено от дефиницията следва, че :

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

или също

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

Процесът по намиране на примитивна на една функция се нарича (неопределено) *интегриране*.

Първата стъпка при пресмятане на неопределени интеграли се състои в обръщане на таблицата за производни на елементарните функции. Така получената таблица е дадена по-долу. Тя ще е основно средство при пресмятане на неопределени интеграли по-нататък.

$\int f(x)dx$	$F(x)+C$
$\int x^n dx$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\neq -1$
$\int x^{-1}dx=\int \dfrac{1}{x}dx=\int \dfrac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
$\int e^x dx$	e^x+C
$\int a^x dx,\ a>0$	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
$\int \sin x dx$	$-\cos x+C$
$\int \cos x dx$	$\sin x+C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$	$\operatorname{tg} x+C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx$	$-\operatorname{cotg} x+C$
$\int \dfrac{1}{x^2+a^2}dx$	$\operatorname{arctg} x+C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$	$\arcsin x+C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert+C$

10.2 Линейни свойства на интеграла

Теорема 2. *Ако f и g са две функции дефинирани в интервала I и такива, интегралите $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$ съществуват, то за всеки две реални константи $a,b\in\mathbb{R}$ е изпълнено*

$$\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx. \tag{1}$$

Пример 1. *1. Пресметнете $\int x^2+\sqrt{x}dx$. Имаме*

$$\int x^2+\sqrt{x}dx=\int x^2dx+\int \sqrt{x}dx$$

$$=\int x^2dx+\int x^{1/2}dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^{3/2}}{3/2}+C.$$

2. Пресметнете $\int(3x+2\sin x-e^x+5x^4)dx$.

Имаме

$$\int(3x+2\sin x-e^x+5x^4)dx = 3\int xdx + 2\int \sin x - \int e^x dx + 5\int x^4 dx$$
$$= 3.\frac{x^2}{2} + 2.(-\cos x) - e^x + 5.\frac{x^5}{5} = 3x^2 - 2\cos x - e^x + x^5.$$

10.3 Смяна на променливата в неопределен интеграл (Внасяне под знака на диференциала)

Дефиниция 3. *Казваме, че функцията u е непрекъснато диференцируема в интервала I, ако нейната производна u' съществува и е непрекъсната функция в този интервал.*

Теорема 3. *Нека $u = u(x)$ е непрекъснато диференцируема функция в интервала I и нека $u(I) \subset J$, където J е друг интервал. Ако $f(u)$ е функция дефинирана в интервала J, и нейната примитивна е $F(u)$ за $u \in J$ тогава*

$$\int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C \tag{2}$$

Обърнете внимание, че композицията $f(u(x))$ и $F(u(x))$ са дефинирани за $x \in I$. Равенството (2) може да се разбира по следния начин. Това, че F е примитивна на f може да се запише така
$$\int f(u)du = F(u) + C,$$
където u е независима променлива (аргумент на f и на F). Така равенството (2) ни казва, че независимата променлива u може да бъде заменена с функцията $u = u(x)$. Това ни казва, че под диференциала (след d) може да стои не само една буква, а и израз. Този израз можем да разглеждаме като нова независима променлива.

Пример 2. *1. Пресметнете $\int(x+5)^7dx$, където. Да положим $y = x+5$. Да пресметнем $y' = (x+5)' = 1$. Тогава $dy = 1.dx = dx$. Заместваме $x+5$ с y и dx с dy получаваме:*

$$\int(x+5)^7dx = \int y^7dy = \frac{y^8}{8} + C = \frac{(x+5)^8}{8} + C.$$

2. Пресметнете $\int \frac{xdx}{1+x^2}$. Да положим $y = x^2+1$. Тогава $y' = 2x$ и $dy = 2xdx$. Значи $dx = \frac{dy}{2x}$. Заместваме x^2+1 с y и dx с $\frac{dy}{2x}$ и получаваме

$$\int \frac{\cancel{x}}{y}\frac{dy}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{y}dy = \frac{1}{2}\ln|y| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$$

3. Пресметнете $\int (x^2+1)^5 x dx$. *Да положим* $y = x^2+1$. *Тогава* $y' = 2x$ *и* $dy = 2xdx$. *Значи* $dx = \frac{dy}{2x}$. *Заместваме* x^2+1 *с* y *и* dx *с* $\frac{dy}{2x}$ *и получаваме*

$$\int y^5 \cancel{x}\frac{dy}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int y^5 dy = \frac{1}{2}\frac{y^6}{6} + C = \frac{(x^2+1)^6}{12} + C.$$

4. Пресметнете $\int \sin(5x)dx$. *Полагаме* $y = 5x$. *Тогава* $y' = 5$ *и* $dy = 5dx$. *Значи* $dx = \frac{dy}{5}$. *Заместваме* $5x$ *с* y *и* dx *с* $\frac{dy}{5}$ *и получаваме*

$$\int \sin(5x)dx = \int \sin y \frac{dy}{5} = \frac{1}{5}\int \sin y dy = \frac{1}{5}(-\cos y) + C = -\frac{1}{5}\cos(5x) + C.$$

5. Пресметнете $\int (\sin x)^7 \cos x dx$. *Полагаме* $y = \sin x$. *Тогава* $y' = \cos x$ *и* $dy = \cos x dx$. *Значи* $dx = \frac{dy}{\cos x}$. *Заместваме* $\sin x$ *с* y *и* dx *с* $\frac{dy}{\cos x}$ *и получаваме*

$$\int (\sin x)^7 \cos x dx = \int y^7 \cancel{\cos x}\frac{dy}{\cancel{\cos x}} = \int y^7 dy = \frac{y^8}{8} + C = \frac{(\sin x)^8}{8} + C.$$

6. Пресметнете $\int (e^x+4)^5 e^x dx$. *Полагаме* $y = e^x + 4$. *Тогава* $y' = e^x$ *и* $dy = e^x dx$. *Значи* $dx = \frac{dy}{e^x}$. *Заместваме* $e^x + 4$ *с* y *и* dx *с* $\frac{dy}{e^x}$ *и получаваме*

$$\int (e^x+4)^5 e^x dx = \int y^5 \cancel{e^x}\frac{dy}{\cancel{e^x}} = \int y^5 dy = \frac{y^6}{6} + C = \frac{(e^x+4)^6}{6} + C.$$

10.4 Интегриране по части

Нека $u(x)$ и $v(x)$ са две функции, дефинирани в интервала $I \subset \mathbb{R}$. Ако съществуват производните $u'(x)$ и $v'(x)$, можем да разглеждаме интеграла $\int u(x)dv(x)$, като имаме в предвид, че $dv(x) = v'(x)dx$. Така, ще разбираме $\int u(x)dv(x) = \int u(x)v'(x)dx$. Аналогично $\int v(x)du(x) = \int v(x)u'(x)dx$.

Теорема 4. *(**Формула за интегриране по части**) Ако u, v са непрекъснато диференцируеми функции в даден интервал I, то*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{3}$$

Тази формула се прилага за пресмятане на някои типове неопределени интеграли, като има за цел да замени един интеграл с друг, за който се очаква, че ще е по-лесен за пресмятане. Тук ще разгледаме следните две групи интеграли, които се решават с формулата за интегриране по части. В първата група влизат интегралите от вида

$$\int x^n \left\{\begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \\ e^x \\ \operatorname{tg} x \\ \operatorname{ctg} x \end{array}\right\} dx,$$

където n е естествено число.

В тези интеграли считаме, че

$$u(x) = x^n \quad \text{и} \quad dv(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \\ e^x \\ \operatorname{tg} x \\ \operatorname{ctg} x \end{array} \right\} dx$$

След това намираме

$$du(x) = nx^{n-1}dx \text{ и } v(x) = \int \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \\ e^x \\ \operatorname{tg} x \\ \operatorname{ctg} x \end{array} \right\} dx.$$

Прилагаме формулата за интегриране по-части.

Сега ще решим няколко примера.

Пример 3. *1. Да пресметнем* $\displaystyle\int xe^x dx$. *Означаваме* $u(x) = x$ *и* $dv(x) = e^x dx$. *Пресмятаме* $du(x) = u'(x)dx = x'dx = 1.dx = dx$ *и* $v(x) = \int dv(x) = \int e^x dx = e^x$. *Прилагаме формулата за интегриране по части:*

$$\int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2. Да пресметнем $\displaystyle\int xe^{3x}dx$. *Означаваме* $u(x) = x$ *и* $dv(x) = e^{3x}dx$. *Пресмятаме* $du(x) = u'(x)dx = x'dx = 1.dx = dx$.

Пресмятането на $v(x) = \int dv(x) = \int e^3 x dx$ *е разгледано в предната точка.*

Полагаме $y = 3x$, $y' = 3$, $dy = 3dx$, $dx = \frac{dy}{3}$. *Така*

$$v(x) = \int dv(x) = \int e^{3x}dx = \int e^y \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int e^y dy = \frac{1}{3}e^y = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Сега можем да приложим формулата за интегриране по части

$$\int xe^{3x}dx = \int xd\frac{1}{3}e^{3x} = x\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

3. Да пресметнем $\displaystyle\int x\cos x dx$. *Означаваме* $u(x) = x$ *и* $dv(x) = \cos x dx$. *Пресмятаме* $du(x) = u'(x)dx = x'dx = 1.dx = dx$ *и* $v(x) = \int dv(x) = \int \cos x dx = \sin x$. *Прилагаме формулата за интегриране по части*

$$\int x\cos x dx = \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C.$$

Друга група интеграли, която се решава с формулата за интегриране по части е

$$\int x^a \left\{ \begin{array}{l} \ln x \\ \log_c x \\ \operatorname{arctg} x \\ \arcsin x \end{array} \right\} dx$$

Тук степенният показател a може да е всяко реално число.

В тези интеграли считаме, че

$$u(x) = \left\{ \begin{array}{l} \ln x \\ \log_c x \\ \operatorname{arctg} x \\ \arcsin x \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad dv(x) = x^a dx.$$

След това намираме

$$du(x) = \left\{ \begin{array}{l} \ln x \\ \log_c x \\ \operatorname{arctg} x \\ \arcsin x \end{array} \right\}' dx \text{ и } v(x) = \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}.$$

Прилагаме формулата за интегриране по-части.

Ще решим няколко примера.

Пример 4. *1. Пресметнете* $\int \ln x dx$. *Да означим* $u(x) = \ln x$ *и* $dv(x) = dx$. *Пресмятаме* $du(x) = u'(x)dx = \frac{1}{x}dx$ *и* $v(x) = \int dv(x)dx = \int dx = x$. *Прилагаме формулата за интегриране по части*

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

2. Пресметнете $\int x^3 \ln x dx$. *Да означим* $u(x) = \ln x$ *и* $dv(x) = x^3 dx$. *Пресмятаме* $du(x) = u'(x)dx = \frac{1}{x}dx$ *и* $v(x) = \int dv(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. *Прилагаме формулата за интегриране по части*

$$\int x^3 \ln x dx = \int \ln x d\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} dlnx$$

$$\frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^{\cancel{4}3}}{4} \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} . \frac{x^4}{4} + C$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

10.5 Задачи

Решете следните неопределени интеграли:

$\int (2x+1)dx$	$\int (1-3x)dx$
$\int (x^2-x+11)dx$	$\int (x^4-x^2)dx$
$\int (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})dx$	$\int \frac{1}{x}dx$
$\int e^x dx$	$\int \frac{2}{x}dx$
$\int e^{2x} dx$	$\int \frac{1}{2+x}$
$\int \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx$	$\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$
$\int \sin x dx$	$\int \frac{2}{1-x}dx$
$\int \cos x dx$	$\int \cos 2x dx$
$\int \sin(x-\pi/3)dx$	$\int (\sin x+\sin 2x)dx$
$\int 2x(1+x^2)^5 dx$	$\int \left\{6x^5-2x^{-4}-7x\right\} dx$
$\int \left\{+3/x-5+4e^x+7^x\right\} dx$	$\int (x/a+a/x+x^a+a^x+ax)\, dx$
$\int \left\{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^4}+\frac{7}{\sqrt[3]{x^2}}-6e^x+1\right\} dx$	$\int \left\{2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}\ dx$