МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

**ЛЕКЦИЯ № 11**

**ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"**

**ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"**

**ТЕМА: Определен интеграл.**

**РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов**

**гр. Плевен 2020 год.**

# 11 Определен интеграл

## 11.1 Дефиниция

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в затворения интервал $[a, b]$, където $-\infty < a < b < \infty$ са реални числа. Нашата задача сега е да въведем едно ново понятие *определен интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

което е число и може да бъде интерпретирано като лицето на частта от равнината заключена между абсцисната ос, графиката на функцията $f$ и двете вертикални прави $x = a$ и $x = b$. Можем да пресметнем приблизително това лице по следния

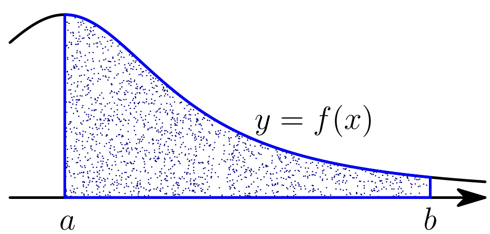

Рис. 1: Лице на криволинеен трапец.

начин: Нека да разделим интервала $[a, b]$ на по-малки подинтервали с точките$X = \{x_k\}_{k=0}^n$, за които

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Така получаваме интервалите

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

с дължини

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

За всеки от тези подинтервали избираме по една точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \ldots, n$. Точките $\Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ са избрани произволно в интервалите $[x_{k-1}, x_k]$. Разглеждаме $n$те правоъгълници с основи $[x_{k-1}, x_k]$ и височини $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Сумата от лицата им да означим с

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Сумата от лицата на тези правоъгълници се нарича *интегрална сума съответна на разделянето* $(X, \Xi)$. Тя ни дава приблизително лицето под графиката на функцията $f(x)$. Това е показано на фигура 2.

От фигура 3 се вижда, че ако се увеличи броя на точките на деление то приближението ще е по-добро.

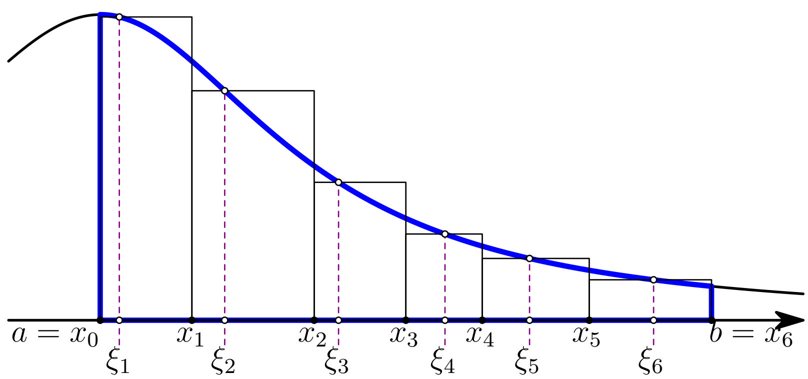

Рис. 2: Приблизително пресмятане на лицето.

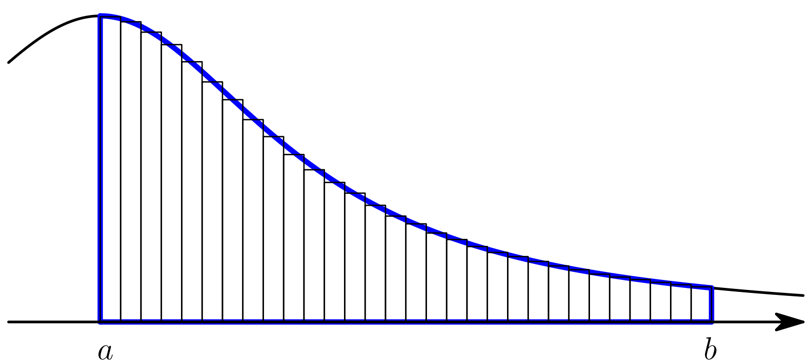


Рис. 3: По-добро приближение с по-голям брой подинтервали.

Нека сега да разгледаме редица от интегрални суми, когато броя на точките на деление расте неограничено и дължините на всичките подинтервали клонят към 0. Можем да считаме границата на тази редица, ако съществува, за лице на криволинейната фигура.

**Дефиниция 1.** *Ако $f$ е функция, дефинирана в интервала $[a, b]$, казваме, че*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I,$$

*интегралът от $f(x)$по $dx$ от $x = a$ до $x = b$ е равен на числото $I$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така, че*

$$\Big| f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n - I \Big| < \varepsilon$$

*е изпълнено за всяко разделяне на подинтервали, за което всички $\Delta x_k < \delta$.*

Това число $I$ считаме за лице на криволинейната фигура.

**Пример 1.** *Нека $f(x) = c$ е константа. Тогава $f$ е интегруема, защото за всяко разбиване и всеки избор на точките $\xi$ имаме*

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = c(b-a)$$

*и следователно границата $\lim_{n\to\infty} S_n(f)$ съществува и е равна на $c(b-a)$. Така можем да напишем*

$$\int\limits_a^b c dx = c(b-a).$$

Пресмятането на определен интеграл не налага да се използва дефиницията. В сила е следната теорема.

**Теорема 1.** *(Основна теорема на интегралното смятане.) Ако $f$ е функция дефинирана в интервала $[a, b]$, за която определеният интеграл $\int_a^b f(x)dx$ съществува, и ако $F$ е една примитивна на $f$, то в сила е следната формула (Формула на Нютон-Лайбниц):*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Да припомним, че примитивна функция на $f$ е такава функция $F$, за която $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in [a, b]$.

С други думи, най-напред пресмятаме неопределения интеграл $\int f(x)dx = F(x)+C$ и даваме на $C$ конкретна числена стойност (най-често $C = 0$), т.е. взимаме една примитивна $F(x)$. След това заместваме $x$ с $b$ и получаваме $F(b)$, после заместваме $x$ с $a$ и получаваме $F(a)$. Накрая пресмятаме разликата $F(b) - F(a)$.

Това можем да запишем и по следния начин

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b$$

Тази формула обяснява защо означенията за определен и неопределен интеграл са подобни независимо от това, че двете понятия са различни.

Често разликата в дясната страна се записва и по следния начин

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(x)\big|_a^b .$$

В интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

числата $a$ и $b$ се наричат *граници на интегрирането*, като $a$ е *долна граница*, $b$ е *горна граница*. Функцията $f(x)$ се нарича *подинтегрална функция*, а променливата $x$ се нарича *интеграционна променлива*.

**Да отбележим, че докато неопределеният интеграл е функция (даже множество от функции), то определеният интеграл е число!**

**Теорема 2.** *(Достатъчни условия за интегруемост)*

*(a) Всяка непрекъсната функция $f(x)$ в интервала $[a,b]$ е интегруема в този интервал.*

*(b) Всяка монотонна функция $f(x)$ в интервала $[a,b]$ е интегруема в този интервал.*

## 11.2 Свойства на определения интеграл

**Теорема 3.** *(Линейни свойства на интеграла) Ако функциите $f$ и $g$ са интегруеми в интервала $[a,b]$ то тогава*

$$\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{2}$$

*ако $c$ е произволна константа, то*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

**Теорема 4.** *(Монотонност на интеграла)*

*(a) Ако $f$ е интегруема в $[a,b]$ и $f \geq 0$ тогава*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

*(б) Ако $f$ и $g$ са интегруеми на $[a,b]$ и $f \geq g$ тогава*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

**Теорема 5.** *Ако $f$ е интегруема в $[a,b]$ тогава и $|f|$ е интегруема и*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

**Теорема 6.** *(Адитивно свойство на интеграла) Нека $f$ е интегруема в интервала $[a,b]$. Тогава за всяко $c \in (a,b)$, $f$ е интегруема в $[a,c]$ и в $[c,b]$, и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

До тук понятието определен интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

беше дефинирано само за случая, когато $a < b$. Нека да определим интеграла за произволна комбинация от долна и горна граница, както следва:

Ако $a = b$, тогава определяме

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

Ако $a > b$, определяме

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx,$$

предполагайки, че $f$ е интегруема в $[b, a]$.

Използувайки тези свойства, ние можем сега да докажем, че всяка непрекъсната функция има примитивна.

**Теорема 7.** *(Съществуване на примитвна за непрекъсната функция) Ако $f$ е непрекъсната функция в интервала $I \subset \mathbb{R}$ то за всяко $c \in I$, функцията*

$$F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$$

*е примитивна за $f$. Така $f$ има поне една примитивна на $I$.*

## 11.3 Интегриране по части и смяна на променливите в определен интеграл

В тази точка ще разгледаме два основни метода за пресмятане на определени интеграли, които се използват в допълнение на формулата на Неютон-Лайбниц. Те са интегриране по части при определен интеграл и смяна на променливата при определен интеграл.

**Теорема 8.** *(Интегриране по части при определен интеграл) Нека $u, v$ са непрекъснато диференцируеми функции в крайния затворен интервал $[a, b]$. Тогава*

$$\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x)$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

**Пример 2.** *Да пресметнем* $\int_0^1 xe^x dx$. *Знаем, че в този тип интеграли* $u(x) = x$, $du(x) = x'dx = dx$, $dv(x) = e^x dx$, $v(x) = \int e^x dx$. *Така*

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = xe^x|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = 1.e^1 - 0.e^0 - e^x|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$$

**Теорема 9.** *(Смяна на променливите при определен интеграл) Нека* $u$ *е непрекъснато диференцируема в интервала* $[a, b]$ *и нейното множество от стойности е интервала* $[\alpha, \beta]$, *където* $\alpha = u(a)$, $\beta = u(b)$. *Нека* $f$ *е непрекъсната функция в интервала* $[\alpha, \beta]$. *Тогава функцията* $f(u(x))u'(x)$ *е интегруема в интервала* $[a, b]$ *и е вярно равенството*

$$\int\limits_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy. \tag{4}$$

**Забележка 1.** *Формулата (4) може да се запомни по следния начин. Когато правим смяната* $y = u(x)$ *в интеграла, трябва да заместим:* $u(x)$ *с* $y$, $u'(x)dx$ *с* $dy$ *и границите* $a$ *с* $u(a)$, $b$ *с* $u(b)$ *границите* $a$ *и* $b$ *на интегриране за променливата* $x$ *чрез границите* $u(a)$ *и* $u(b)$ *на интегриране за променливата* $y$.

**Пример 3.** *1. Да пресметнем интеграла* $\int_0^1 (x^2 + 2)^3 x dx$. *Полагаме* $y = x^2 + 2$. *Пресмятаме* $dy = (x^2 + 2)'dx = 2xdx$, *т.е.* $xdx = \frac{dy}{2}$. *Новата долна граница е* $\alpha = 0^2 + 2 = 2$, *а горната* $\beta = 1^2 + 2 = 3$. *Така*

$$\int\limits_0^1 (x^2 + 2)^3 x dx = \int\limits_2^3 y^3 \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int\limits_2^3 y^3 dy = \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{y^4}{4} \right|_2^3 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} \right] = \frac{81 - 16}{8} = \frac{65}{8}.$$

## 11.4 Задачи

Пресметнете интегралите чрез формулата на Нютон-Лайбниц.

$$\int\limits_{-2}^4 (3x - 5)\, dx \qquad \int\limits_1^4 x^{-2}\, dx$$

$$\int\limits_0^1 (1 - 2x - 3x^2)\, dx \qquad \int\limits_1^2 (5x^2 - 4x + 3)\, dx$$

$$\int_{-3}^{0} (5y^4 - 6y^2 + 14)\, dy$$

$$\int_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx$$

$$\int_{1}^{3} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4}\right) dt$$

$$\int_{1}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\int_{0}^{1} u(\sqrt{u} + \sqrt[3]{u})\, du$$

$$\int_{3}^{3} \sqrt{x^5+2}\, dx$$

$$\int_{1}^{4} (\sqrt{t} - 2/\sqrt{t})\, dt$$

$$\int_{-1}^{0} (x+1)^3\, dx$$

$$\int_{1}^{e} \frac{x^2+x+1}{x}\, dx$$

$$\int_{0}^{1} \left(\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^4}\right) dx$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin t\, dt$$

$$\int_{0}^{\pi/2} (\cos\theta + \sin 2\theta)\, d\theta$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cot x}{\sin x}\, dx$$

$$\int_{0}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{0}^{1} (y^9 - 2y^5 + 3y)\, dy$$

$$\int_{0}^{1} x^{3/7}\, dx$$

$$\int_{1}^{2} \frac{t^6 - t^2}{t^4}\, dt$$

$$\int_{0}^{2} (x^3-1)^2\, dx$$

$$\int_{1}^{2} (x + 1/x)^2\, dx$$

$$\int_{1}^{-1} (x-1)(3x+2)\, dx$$

$$\int_{1}^{8} \left(\sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right) dr$$

$$\int_{-5}^{-2} \frac{x^4-1}{x^2+1}\, dx$$

$$\int_{4}^{9} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$\int_{1}^{8} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$$

$$\int_{0}^{\pi/2} (\cos\theta + 2\sin\theta)\, d\theta$$

$$\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\tan x}{\cos x}\, dx$$

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{6}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_{4}^{8} (1/x)\, dx$$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^x \, dx$$

$$\int_{8}^{9} 2^t \, dt$$

$$\int_{-e^2}^{-e} \frac{3}{x} \, dx$$

$$\int_{-2}^{3} |x^2 - 1| \, dx$$