МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 12

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Обикновени диференциални уравнения.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

12 Обикновени диференциални уравнения

До сега ние сме срещали различни видове уравнения: линейни, квадратни, системи уравнения, в които неизвестните са една или няколко променливи величини. За да решим едно уравнение трябва да намерим число (или числа), които заместени на мястото на неизвестното, довеждат уравнението до вярно равенство. Тези числа се наричат решения на уравнението (или системата).

Диференциално уравнение е такова уравнение, в което неизвестното е функция. Тази неизвестна функция участва в уравнението заедно с производните си до някакъв ред.

Това можем да запишем в обща форма по следния начин

$$y' = f(x, y)$$

или

$$y'' = f(x, y, y'),$$

където $f(x, y)$ е някакъв известен израз, x е независимата променлива, y е неизвестната функция и y', y'' са нейните първа и втора производни.

Една диференцируема функция $g(x)$ е решение на това диференциално уравнение, ако при заместване на y, y' и y'' с $g(x)$, $g'(x)$ и $g''(x)$

$$g'(x) = f(x, g(x)) \qquad \text{или} \quad (g''(x) = f(x, g(x), g'(x)))$$

се превърне в тъждество.

Пример 1. *Да разгледаме следното диференциално уравнение*

$$y' = \cos x + 3.$$

Не е трудно да се сетим, че функцията $g(x) = \sin x + 3x$ е решение на това уравнение, защото $g'(x) = \cos x + 3$ и при заместване, уравнението става тъждество. По-нататък можем да видим, че всяка функция $y = \sin x + 3x + C$, където C е произволна константа, също е решение на това диференциално уравнение.

Малко по-общо: Ако вземем уравнението $y' = f(x)$, то съгласно изученото за неопределен интеграл $y = \int f(x)dx = F(x) + C$ е решение на това уравнение. Такова решение, в което участва една или повече произволни константи се нарича *общо решение* на уравнението. Когато на произволната константа дадем конкретна числена стойност получаваме едно *частно решение*. Така в разглеждания пример $y = y = \sin x + 3x + C$ е общото решение, а $g(x) = y = \sin x + 3x$ е частно решение, получено при $C = 0$.

Редът на диференциалното уравнение се определя от най-високия ред на производните, които участват в него. Така уравнението $y' = f(x, y)$ е от първи ред, а уравнението $y'' = f(x, y, y')$ е от втори ред.

В зависимост от вида на функцията f диференциалното уравнение може да е линейно или нелинейно.

Линейно диференциално уравнение от първи ред има следния вид:

$$y' = -p(x)y + q(x) \quad \text{или} \quad y' + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

където $p(x)$ и $q(x)$ са две известни функции.

Линейно диференциално уравнение от втори ред има следния вид:

$$y'' = -p(x)y' - q(x)y + r(x) \quad \text{или} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2}$$

където $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ са три известни функции.

12.1 ДУ с разделящи се променливи

Най-простият тип диференциални уравнения от първи ред са така наречените уравнения с разделящи се променливи. Те могат да се представят в следния общ вид

$$y' = a(x)b(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = a(x)b(y),$$

където $a(x)$ и $b(y)$ са две известни функции: едната е функция само на x, а другата - само на y. Решаването на такова уравнение се свежда до разделяне на променливите в двете страни на уравнението и пресмятане на два интеграла независимо един от друг.

Така, ако формално умножим двете страни на уравнението с dx ще получим

$$dy = a(x)b(y)dx.$$

Да разделим двете страни на новото уравнение с $b(y)$. Получаваме

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x)dx.$$

Сега лявата страна е функция само на y, а дясната само на x. Интегрираме поотделно всяка от двете страни

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)dx + C,$$

където, както знаем C е произволна константа. Като изразим от това равенство y чрез x и C получаваме общото решение на ДУ. Когато на C дадем конкретна числена стойност, се получава едно частно решение на ДУ.

Пример 2. *Да решим следното уравнение с разделящи се променливи $y' = x^2y$. Да запишем уравнението във вида*

$$\frac{dy}{dx} = x^2y$$

и да извършим следните преобразувания: Умножаваме двете страни на уравнението с dx и получаваме

$$dy = x^2ydx.$$

Делим двете страни на уравнението с y и получаваме

$$\frac{dy}{y} = x^2 dx.$$

Сега интегрираме двете страни поотделно

$$\int \frac{y}{dy} = \int x^2 dx.$$

Така

$$\ln y = \frac{x^3}{3} + C,$$

от тук намираме общото решение $y = Ce^{x^3/3}$ на диференциалното уравнение.

12.2 Линейни ОДУ от първи ред

Както посочихме и по-горе линейно обикновено диференциално уравнение от първи ред е уравнение от вида

$$y' + p(x)y = q(x)$$

където $y' = dy/dx$ и $p(x)$ и $q(x)$ са известни функции на x.

Ако $p(x) = 0$, то уравнението става $y' = q(x)$ и решението му е $y = \displaystyle\int q(x)dx + C$. Ако $q(x) = 0$ уравнението става с разделящи се променливи $y' = -p(x)y$ и се решава както в предната точка.

В общият случай, когато $p(x) \neq 0$ и $q(x) \neq 0$, ще използваме следната теорема, която дава общото решение на уравнението.

Теорема 1. *Общото решение на обикновено линейно диференциално уравнение от първи ред $y' + p(x)y = q(x)$ е*

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[C + \int \mu(x) q(x) dx \right]$$

където $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Теоремата дава следния алгоритъм за решаване на такива уравнения.

АЛГОРИТЪМ. За да решим $y' + p(x)y = q(x)$, изпълняваме следните стъпки:

(1) Намираме $P(x) = \displaystyle\int p(x)dx$.

(1) Намираме $\mu(x) = e^{P(x)}$.

(2) Намираме $Q(x) = \displaystyle\int \mu(x)q(x)dx$.

(3) Намираме $y = \dfrac{1}{\mu(x)} \left[C + Q(x) \right]$.

Пример 3. *Да се реши уравнението* $y' + 2xy = x$.

Имаме $p(x) = 2x$ *и* $q(x) = x$.

(1) Намираме

$$P(x) = \int p(x)dx = \int 2xdx = x^2.$$

Тогава

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{x^2}.$$

(2) Пресмятаме

$$Q(x) = \int \mu(x)q(x)dx = \int e^{x^2}xdx.$$

Полагаме $y = x^2$, $dy = 2xdx$ *и* $dx = \frac{dy}{2x}$. *За интеграла получаваме*

$$Q(x) = \int e^y \cancel{x}\frac{dy}{2\cancel{x}} = \int e^y \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

(3) Записваме общото решение

$$y = e^{-x^2}[\frac{1}{2}e^{x^2} + C] = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

Пример 4. *Да се реши уравнението* $xy' - y = x^2e^{-x}$.

Най-напред да препишем уравнението в стандартна форма и да определим $p(x)$ *и* $q(x)$. *Имаме последователно* $y' - y/x = xe^{-x}$, *т.е.* $p(x) = -1/x$ *и* $q(x) = xe^{-x}$.

(1) Тогава $P(x) = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln x$ *и* $\mu(x) = e^{-\ln x} = 1/x$.

(2) След това намираме $Q(x) = \int xe^{-x}\frac{1}{x}dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$.

(3) Така

$$y = x[C - e^{-x}].$$

12.3 Линейни хомогенни ОДУ от втори ред с постоянни коефициенти

Диференциалното уравнение

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3}$$

където a, b и c са константи, се нарича линейно хомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти от 2 ред.

Решението на такова уравнение се намира по следния алгоритъм:

1. Съставяме квадратното уравнение

$$ar^2 + br + c = 0,$$

което се нарича *характеристично уравнение* на даденото ДУ.

В зависимост от корените на характеристичното уравнение се определя решението на ЛОДУ с постоянни коефициенти (3).

Възможни са следните случаи:

1. $D = b^2 - 4ac > 0$, (характеристичното уравнение има два различни реални корена) $r_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Общото решение на диференциалното уравнение е

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \tag{4}$$

2. $D = b^2 - 4ac = 0$, (характеристичното уравнение има един двоен реален корен) $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$.

Общото решение на диференциалното уравнение е

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_1 x} x. \tag{5}$$

3. $D = b^2 - 4ac < 0$, (характеристичното уравнение няма реални корени) Пресмятаме $\alpha = \frac{-b}{2a}$ и $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2a}$.

Общото решение на диференциалното уравнение е

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \tag{6}$$

Да решим няколко примера:

Пример 5. *Да решим уравнението $y'' - 3y' + 2y = 0$.*

Характеристичното уравнение е $r^2 - 3r + 2 = 0$.

В него $a = 1, b = -3, c = 2$.

Пресмятаме дискриминантата

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

и корените

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3-1}{2} = 1,$$
$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Имаме 1 случай и по формула (4) записваме общото решение на диференциалното уравнение

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}.$$

Пример 6. *Да решим уравнението* $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристичното уравнение е $r^2 - 4r + 4 = 0$.

В него $a = 1, b = -4, c = 4$.

Пресмятаме дискриминантата

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$$

и корените са реални и равни

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.1} = 2.$$

Имаме случай 2 и общото решение на диференциалното уравнение се записва по формула (5)

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x.$$

Пример 7. *Да решим уравнението* $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Характеристичното уравнение е $r^2 + 4r + 5 = 0$.

В него $a = 1, b = 4, c = 5$.

Пресмятаме дискриминантата

$$D = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4.1.5 = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Имаме третия случай. Пресмятаме числата $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.1} = -2$ *и* $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{\sqrt{|-4|}}{2.1} = 1$ *Сега по формула ((6) записваме общото решение*

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x.$$

12.4 Задача на Коши

До тук в лекцията намирахме общите решения на диференциалните уравнения, които зависят от една или повече произволни константи. Както беше казано в началото, ако на тези произволни константи дадем конкретни числени стойности, получаваме едно частно решение.

В различни области на науката и практиката, където възникват диференциални уравнения, се търси частно решение, което да удовлетворява не само уравнението, но и други допълнителни условия. Тук ще разгледаме линейни хомогенни уравнения, за които са зададени допълнителни условия, които отделят едно частно решение.

В общ вид задачата е следната:

$$\begin{aligned} &ay'' + by' + cy = 0 \\ &y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \end{aligned}$$

Освен уравнението са дадени условия за стойността на решението $y(x)$ и на първата му производна $y'(x)$ в дадена точка x_0. Тези условия се наричат начални условия, задачата, както е дадена, се нарича начална задача или задача на Коши́.

Решаването на задачата на Коши́ се състои от следните стъпки:

1) Намираме общото решение $y = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)$.

2) Намираме $y' = C_1\phi_1'(x) + C_2\phi_2'(x)$.

3) Като използваме началните условия, съставяме системата алгебрични уравнения за константите C_1 и C_2:

$$\left| \begin{array}{l} C_1\phi_1(x_0) + C_2\phi_2(x_0) = y_0 \\ C_1\phi_1'(x_0) + C_2\phi_2'(x_0) = y_1 \end{array} \right.$$

и я решаваме.

4) С намерените числа $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ заместваме произволните константи в общото решение.

Пример 8. *Да се реши задачата на Коши*

$$\left| \begin{array}{l} y'' - 6y' + 8y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{array} \right.$$

1) Намираме общото решение на уравнението $y'' - 6y' + 8y = 0$. Характеристичното уравнение е $r^2 - 6r + 8 = 0$. Корените му са $r_1 = 2$ и $r_2 = 4$. Така, общото решение е $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$.

2) $y' = C_1.2e^{2x} + C_2.4e^{4x} = 2C_1e^{2x} + 4C_2e^{4x}$.

3) От $y(0) = 1$ като заместим в общото решение x с 0 и y с 1, полчаваме $C_1e^0 + C_2e^0 = 1$ или $C_1 + C_2 = 1$. По същия начин, от $y'(0) = 2$ като заместим в y', x с 0 и y' с 2, получаваме $2C_1e^0 + 4C_2e^0 = 2$ или $2C_1 + 4C_2 = 2$. Системата е

$$\left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + 4C_2 = 2 \end{array} \right.$$

Решението на системата е $C_1 = 1, C_2 = 0$.

4) Търсеното частно решение е $y = 1.e^{2x} + 0.e^{4x}$, т.е. $y = e^{2x}$.

12.5 Задачи

1. Решете следните линейни ДУ от първи ред:

$$\begin{array}{llll} y' - \dfrac{2x}{x^2+1}y = x^2 + 1 & y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = 1 & y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{2x}{\cos x} & y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x} \\ y' - \dfrac{1}{x}y = x & y' - \dfrac{2x}{x^2+1}y = 2x(x^2+1) & y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3} & y' - \dfrac{4y}{x} = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

2. Решете следните линейни хомогенни ДУ от втори ред:

$$\begin{array}{llll} y'' - 4y' + 3y = 0 & y'' + 2y' - 8y = 0 & y'' + 3y' + 2y = 0 & y'' - 16y = 0 \\ y'' - y' - 90y = 0 & y'' + 4y' - 21y = 0 & y'' + 12y' + 35y = 0 & y'' - 13y' + 36y = 0 \\ y'' - 2y' + y = 0 & y'' + 8y' + 16y = 0 & y'' + 6y' + 25y = 0 & y'' + 9y = 0 \end{array}$$

3. Решете задачата на Коши:

$$\left|\begin{array}{l} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} y'' + 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 2y'' - y' = 0 \\ y(0) = 7, \quad y'(0) = 5 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 6 \end{array}\right.$$