МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 13

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Вероятност.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

13 Вероятност

13.1 Опити с повече от един възможен изход. Примери

В много ситуации в практиката, в природата, в игрите и т.н. се провеждат опити, резултатът от които не може да бъде предварително еднозначно предсказан.

Такива опити е прието да се наричат случайни, или опити със случайни изходи.

Ето няколко примера:

- Хвърляне на правилна монета е случаен опит с два възможни изхода: "ЕЗИ" и "ГЕРБ". Знаем, че не може отнапред да се каже коя страна ще е отгоре: "ЕЗИ" или "ГЕРБ".
- Хвърляне на правилен зар. Това е случаен опит с 6 възможни изхода. Не можем да предскажем, преди извършване на опита, какъв ще е резултата от него.
- Теглене на карта от тесте с 32 карти е случаен опит с 32 възможни изхода.
- Чакане на автобус на спирка. Времето до пристигането му може да е всяко число между 0 и времето между пристигането на два последователни автобуса. Тук възможните изходи са безброй много.
- Измерване на температурата на въздуха в дадено място е също опит с безброй много изходи.

13.2 Дефиниции

Дефиниция 1 *Пространство от елементарните изходи Ω се нарича множеството от всички възможни, взаимно изключващи се резултати от даден опит.*

Два изхода са взаимно изключващи се, ако при провеждане на експеримента не могат да се случат едновременно. Така при провеждане на опита се случва един и само един от тези елементарни изходи.

Дефиниция 2 *Елементите на това множество се наричат елементарни изходи или елементарни събития и се означават с ω със или без индекс.*

Пример 1 *1. В опита с хвърляне на монета има две елементарни събития - да се падне "герб" ω_1 или "ези" ω_2. Тези два изхода и съставляват пространството от елементарни изходи при този опит, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.*

2. В опита с хвърляне на зар имаме 6 елементарни изхода:
ω_1 - да се падне 1 точка;
ω_2 - да се паднат 2 точки;
ω_3 - да се паднат 3 точки;
ω_4 - да се паднат 4 точки;
ω_5 - да се паднат 5 точки;

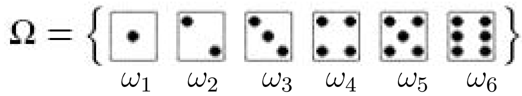

Рис. 1: Възможни изходи при хвърляне на правилен зар

ω_6 - да се паднат 6 точки.

Не е трудно да се сетим, че те са взаимно изключващи се. Така пространството от елементарни изходи за този опит е

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

3. Включваме лампа и я оставяме да свети докато изгори. Тук времето на светене мижe да бъде всяко реално число от интервала $[0, \infty)$. Така елементарните изходи са неизброимо много. $\Omega = [0, \infty)$.

В практиката по-често се интересуваме не само от елементарните събития свързани с даден опит, а и от някои не елементарни събития.

Дефиниция 3 *Подмножествата на пространството Ω се наричат случайни свбития или само свбития.*

Те се означават с главни латински букви $A, B, C \ldots$.

Така всяко събитие съдържа част от елементарните изходи на Ω.

В частност самото Ω, което съдържа всички елементарни изходи, и празното множество $\emptyset$, което не съдържа никакви елементарни изходи, също са събития.

Ще казваме, че при провеждането на опита, се е сбъднало едно случайно събитие A, ако се е получил елементарен изход, който принадлежи на A.

Тъй като Ω съдържа всички възможни елементарни изходи, то винаги се сбъдва. Затова Ω се нарича **достоверно събитие**.

Обратно, понеже $\emptyset$ не съдържа никакъв елементарен изход, то никога не се сбъдва, затова се нарича **невъзможно събитие**.

Пример Нека разгледаме опита с хвърляне на зар. Тогава

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Ето няколко събития свързани с този опит $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, което с думи може да се опише така $A = \{\text{Пада се нечетно число}\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, т.е. $B = \{\text{Пада се четно число}\}$, $C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, което може да се опише така $C = \{\text{Пада се по-малко о}$

13.3 Действия със събития

Нека Ω е пространството от елементарните изходи свързано с даден опит. За всеки две събития A и B определяме:

- Сумата (обединението) им

$$\mathbf{A + B} = \{\textbf{съдържа всички елементарни изходи, които принадлежат поне на едно от двете A и/или B}\}.$$

Пример 2 *1. Хвърля се правилен зар. Ако $A = \{\omega_1, \omega_3\} = \{$пада се 1 или 3$\}$ и $B = \{\omega_3, \omega_5\} = \{$пада се 3 или 5$\}$, то*

$$A + B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = \{\textit{пада се нечетен брой точки}\}.$$

2. Хвърлят се две монети. Тогава всички елементарни изходи са $\omega_{gg} = \{ГГ\}$, $\omega_{ge} = \{ГЕ\}$, $\omega_{eg} = \{ЕГ\}$, $\omega_{ee} = \{ЕЕ\}$.

Ако $A = \{$падат се два герба$\} = \{\omega_{gg}\}$, $B = \{$пада се поне един герб$\} = \{\omega_{gg}, \omega_{eg}, \omega_{ge}\}$, то $A + B = B$.

- Произведението (сечението) им

$$\mathbf{A.B} = \{\textbf{съдържа всички елементарни изходи, които са общи за A и за B}\}.$$

Пример 3 *1. Хвърля се правилен зар. Ако $A = \{\omega_1, \omega_3\} = \{$пада се 1 или 3$\}$ и $B = \{\omega_3, \omega_5\} = \{$пада се 3 или 5$\}$, то $A.B = \{\omega_3\} = \{$падат се 3 точки$\}$.*

2. Хвърлят се две монети. Тогава всички елементарни изходи са $\omega_{gg} = \{ГГ\}$, $\omega_{ge} = \{ГЕ\}$, $\omega_{eg} = \{ЕГ\}$, $\omega_{ee} = \{ЕЕ\}$.

Ако $A = \{$падат се два герба$\} = \{\omega_{gg}\}$, $B = \{$пада се поне един герб$\} = \{\omega_{gg}, \omega_{eg}, \omega_{ge}\}$, то $A.B = A$.

- Противоположно събитие на дадено събитие A е

$$\overline{A} = \{\textbf{съдържа всички елементарни изходи от } \Omega, \textbf{ които не принадлежат на } A\}.$$

Пример 4 *Хвърля се правилен зар. Ако $A = \{\omega_1, \omega_3\} = \{$пада се 1 или 3$\}$, то $\overline{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.*

13.4 Класическа дефиниция на вероятност

Даже и без да сме давали каквито и да е определения, изхождайки от ежедневния си житейски опит всеки ще се съгласи, че различните случайни събития могат да се сравняват по степента за тяхното възможно сбъдване. Например, улучването на мишена при стрелба от по-близко разстояние е по-възможно да се случи, отколкото при стрелба от по-далечно разстояние.

Ако в една лотария има 100 печеливши от общо 1000 билета, а в друга има 1 печеливш от 1000 билета, то всеки би предпочел да си купи билет от първата лотария, отколкото от втората.

Вероятността на едно случайно събитие, свързано с даден експеримент, е числена мярка на възможността за настъпване на това случайно събитие при провеждане на експеримента.

С други думи, на всяко случайно събитие A се съпоставя едно реално число, което ще означаваме с $P(A)$ и ще наричаме вероятност на събитието A. Това число е толкова по-голямо, колкото е по-възможно да се сбъдне събитието A.

Тази мярка може да се определи по различни начини. Ще разгледаме най-напред, така наречената класическа дефиниция на вероятност.

Нека Ω е пространството от елементарните изходи, свързани с даден опит. Предполагаме, че всички тези елементарни изходи са еднакво възможни. Нека A е случайно събитие, т.е. подмножество на Ω.

Тогава определяме вероятността за сбъдване на събитието A така:

$$P(A) = \frac{\text{Броя на елементарните изходи, които са в } A}{\text{Броя на всички елементарни изходи в } \Omega}.$$

Елементарните изходи, които се съдържат в събитието A се наричат благоприятни за A. Така, горната дефиниция по-често се дава във следния вид

$$P(A) = \frac{\text{Броя на благоприятните изходи за } A}{\text{Броя на всички възможни изходи от} \Omega}.$$

Друга дефиниция е така наречената статистическа дефиниция на вероятност.

Нека опитът, с който е свързано дадено случайно събитие, е повторен N пъти, където N е достатъчно голямо число. Нека в тези N повторения събитието A се е сбъднало K пъти. Тогава определяме неговата вероятност така:

$$P(A) = \frac{K}{N} = \frac{\text{брой на сбъдванията на събитието} A}{\text{брой на повторенията на опита}}.$$

Поради това, че в примерите, които ще разглеждаме е изпълнено условието за равно възможни изходи, ние ще използваме първата дефиниция.

От нея следват няколко свойства на вероятността, които ще формулираме сега.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ за всяко събитие A, защото броят на благоприятните изходи е по-голям или равен на 0 и по-малък или равен на броя на всички възможни изходи;

2. $P(\Omega) = 1$, защото за Ω са благоприятни всичките възможни изходи;

3. $P(\emptyset) = 0$, защото $\emptyset$ няма благоприятни изходи, то не съдържа нито един елементарен изход.

13.5 Формули за събиране и умножение на вероятности.

Възниква следният въпрос: Ако едно събитие може да се представи като сума или произведение на по-прости събития, то дали е възможно неговата вероятност да се пресметне, ако се знаят вероятностите на тези по-прости събития?

На този въпрос ще дадем отговор в тази точка.

Нека да предположим, че събитията A и B са несъвместими, т.е. те не могат да се случат едновременно при провеждането на експеримента, или с други думи няма елементарен изход, който да принадлежи и на двете събития ($A.B = \emptyset$.)

Ако знаем вероятностите за сбъдването на всяко от събитията A и B, то за вероятността за сбъдване на поне едно от тях, т.е. за вероятността на сумата $A + B$ е в сила теоремата за събиране на вероятностите:

Теорема 1 *За всеки две събития A и B, за които $A.B = \emptyset$ е изпълнено $P(A+B) = P(A) + P(A)$.*

Следствие 1 *За всеки две допълнителни събития е в сила $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.*

Ако събитията A и B не са несъвместими, т.е. $A.B \neq \emptyset$, тогава е в сила следната по-обща теорема.

Теорема 2 *За всеки две събития A и B, за които $A.B \neq \emptyset$ е изпълнено $P(A+B) = P(A) + P(A) - P(A.B)$.*

Пример 5 *Група студенти се състои от 10 души. От тях 4 знаят английски, 3 знаят френски и 2 знаят и двата езика.*

Колко студенти не знаят нито един език. Каква е вероятността случайно избран студент да знае:

- английски;

- френски;

- и двата езика;

- поне един от двата езика;

- нито един от двата.

Нека $A = \{$ избраният студент знае английски $\}$, $B = \{$ избраният студент знае френски $\}$, Тогава $A.B = \{$ избраният студент знае и двата езика френски $\}$, $A+B = \{$ избраният студент знае поне един език$\}$, $\overline{A+B} = \{$ избраният студент не знае нито един език $\}$.

При случаен избор на един от 10 души имаме 10 елементарни изхода. За събитието А са благоприятни 4 от тях, това са студентите, които знаят английски. Следователно $P(A) = \frac{4}{10}$. Аналогично за събитието B имаме три благоприятни изхода и $P(B) = \frac{3}{10}$.

За едновременното сбъдване на A и B, т.е. на $A.B$ имаме 2 благоприятни изхода, така $P(A.B) = \frac{2}{10}$.

По теоремата за събиране на вероятностите имаме $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A.B) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$.

Накрая съгласно Следствие 1, $P(A+B)+P(\overline{A+B}) = 1$*, следователно* $P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - \frac{5}{10} = \frac{5}{10}$.

13.6 Условна вероятност

Условната вероятност е едно от основните понятия в теория на вероятностите.

Тя отразява промяната на нашата оценка за вероятността за сбъдване на едно събитие, ако сме получили допълнителни сведения за това, какво се е случило при провеждане на опита.

Така, ако при хвърляне на правилен зар ние оценяваме вероятността за шестица, равна на $\frac{1}{6}$, то при допълнителното знание, че на стените на зара има само шестици, ние ще оценим вероятността за шестица на $\frac{6}{6} = 1$. Ако пък знаем, че на зара има две двойки, две четворки и две шестици, то тогава вероятността за шестица ще пресметнем равна на $\frac{2}{6}$.

Нека сега дадем строга дефиниция на понятието условна вероятност. Ако A и B са две събития свързани с даден експеримент и ние знаем, че се е сбъднало събитието B, условната вероятност за сбъдване на събитието A при условие, че се е сбъднало събитието B означаваме с $P(A|B)$ и пресмятаме така

$$P(A|B) = \frac{P(A.B)}{P(B)}.$$

Тази формула по-често ще използваме в следния вид

$$P(A.B) = P(B)P(A|B)$$

и се нарича също формула за умножение на вероятностите.

Ако сбъдването на събитието A не зависи от това дали се е сбъднало събитието B, то тогава

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{и} \quad P(A.B) = P(A).P(B).$$

В такъв случай казваме, че събитията A и B са независими.

Така, намерихме, че ако две събития са независими, вероятността за едновременното им сбъдване $P(A.B)$ е произведението от вероятностите им $P(A).P(B)$.

Пример 6 *Хвърля се правилен зар. Да разгледаме събитията* $A = \{$ *падат се 1, 2 или 3* $\}$, $B = \{$ *пада се нечетно число* $\}$*. Имаме* $P(A) = 3/6$, $P(B) = 3/6$. $A.B = \{$ *пада се 1 или 3* $\}$*, следователно* $P(A.B) = 2/6$*. Така*

$$P(A|B) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3} \neq P(A) = 3/6.$$

13.7 Формула за пълната вероятност. Формула на Бейс

Дефиниция 4 *Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ са събития свързани с даден опит. Предполагаме, че са изпълнени следните условия:*

1. Събитията са несъвместими (т.е. $H_i.H_j = \emptyset$ за всеки $1 \leq i \neq j \leq n$.

2. $P(H_i) > 0$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

*Такава група събития се нарича **пълна група.***

13.7.1 Формула за пълната вероятност

Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е пълна група събития и A е друго събитие свързано със същия опит. Тогава е в сила следната формула (Формула за пълната вероятност):

$$P(A) = P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) + \ldots + P(H_n).P(A|H_n).$$

Пример 7 *Група от 30 студенти ще се явява на изпит. Конспектът се състои от 20 въпроса. В групата има 4 отлични студенти; 8 са много добри; 10 са добри; 5 са средни и 3 са слаби. Всеки от отличниците знае всичките 20 въпроса от конспекта. Всеки от много добрите знае по 18 въпроса, всеки от добрите знае по 15 въпроса, всеки от средните знае по 10 въпроса всеки от слабите знае по 5 въпроса.*

На изпита влиза случайно избран студент от групата и тегли 1 въпрос. Каква е вероятността той да отговори вярно?

Нека означим с A събитието: $\{$ случайно избрания студент знае изтегления въпрос $\}$.

Да разгледаме следните събития:

$H_1 = \{$ *случайно избрания студент е отличник* $\}$

$H_2 = \{$ *случайно избрания студент е много добър* $\}$

$H_2 = \{$ *случайно избрания студент е добър* $\}$

$H_4 = \{$ *случайно избрания студент е среден* $\}$

$H_5 = \{$ *случайно избрания студент е слаб* $\}$

Като вземем в предвид броя на студентите в групата, пресмятаме, че вероятността при случаен избор на един човек, той да е отличник е $P(H_1) = \frac{4}{30}$ (имаме 4 благоприятни и 30 възможни изхода). По същия начин $P(H_2) = \frac{8}{30}$, $P(H_3) = \frac{10}{30}$, $P(H_4) = \frac{5}{30}$ и $P(H_5) = \frac{3}{30}$.

От друга страна ако избраният студент е отличник, вероятността да знае случайно избран въпрос от конспекта е $P(A|H_1) = \frac{20}{20}$ (20 благоприятни от 20 възможни).

По същия начин пресмятаме $P(A|H_2) = \frac{18}{20}$, $P(A|H_3) = \frac{15}{20}$, $P(A|H_4) = \frac{10}{20}$, $P(A|H_5) = \frac{5}{20}$.

Като приложим формулата за пълната вероятност намираме.

$$
\begin{aligned}
&P(A)\\
&= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4) + P(H_5)P(A|H_5)\\
&= \frac{4}{30}\frac{20}{20} + \frac{8}{30}\frac{18}{20} + \frac{10}{30}\frac{15}{20} + \frac{5}{30}\frac{10}{20} + \frac{3}{30}\frac{5}{20}\\
&= \frac{80+144+150+50+15}{600} = \frac{439}{600}.
\end{aligned}
$$

13.7.2 Формула на Бейс

Да продължим с примера. Нека предположим, че случайно избран студент е изтеглил по случаен начин един съпрос и е отговорил вярно. Каква е вероятността този студент да е например от групата на средните студенти, т.е. каква е вероятността $P(H_4|A)$?

Пресмятането на тази вероятност и изобщо на вероятностите $P(H_i|A)$, след като сме пресметнали вероятността на събитието A по формулата за пълната вероятност, става по следната формула (Формула на Бейс):

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

за всяко $i = 1, 2, \dots, n$.

Така в нашия пример

$$P(H_4|A) = \frac{P(H_4)P(A|H_4)}{P(A)} = \frac{50}{600} : \frac{439}{600} = \frac{50}{439}.$$

13.8 Задачи

1. Нека да хвърлим два пъти правилен зар. Пространството от възможните изходи е дадено в таблицата.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

а) Пресметнете вероятностите на следните събития:
$A = \{$ на двата зара са паднали равен брой точки $\}$;
$B = \{$ На първия зар са се паднали повече точки от втория$\}$;
$C = \{$ Сумата от точките на двата зара е равна на 7 $\}$;
$D = \{$ Точките на първия зар са четен брой $\}$;
$\{$ Точките на втория зар са повече от 4 $\}$.

б) Пресметнете условната вероятност $P(E|D)$ за събдване на E при условие че се е събднало D.

2. В урна има 5 бели и 4 черни топки. Изваждат се последователно без връщане 2 от тях. Каква е вероятността и двете да са: а) бели; б) черни; в) с различен цвят?

3. Двама стрелци стрелят едновременно по мишена. Известно е че първият улучва мишената с вероятност 0,9, а вторият с вероятност 0,8. Каква е вероятността в мишената да има: 2 попадения, 1 попадение, 0 попадения?