МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 14

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Случайни величини.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

14 Случайни величини

14.1 Дискретни случайни величини.

В много случаи е удобно изходите от един случаен експеримент да се изразяват с числа. Един типичен пример е хвърлянето на зарове.

Дефиниция 1 *Нека Ω е пространството от елементарните изходи свързани с даден опит. Нека X е функция, която на всеки елементарен изход съпоставя реално число, т.е.*

$$X : \Omega \to \mathbf{R}.$$

Такава функция, чиито стойности зависят от изходите на случаен опит, наричаме случайна величина.

Пример 1 *1. Хвърляме еднократно правилна монета. Знаем, че $\Omega = \{E, T\}$. Нека $X(E) = 1$, $X(T) = -1$. X е случайна величина с две възможни значения.*

2. Хвърляме правилен зар. Тогава

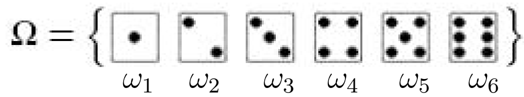

Рис. 1: Случайна величина свързана с хвърляне на на правилен зар

Обичайно, ние считаме, че $Z(\omega_1) = 1$*,* $Z(\omega_2) = 2$*,* $Z(\omega_3) = 3$*,* $Z(\omega_4) = 4$*,* $Z(\omega_5) = 5$*,* $Z(\omega_6) = 6$*. От тук не е трудно да се досетим, че можем да пресмятаме вероятностите на различни сббитя свързани с тази случайна величина. Така събитието* $\{Z = 3\} = \omega_3$ *и следователно* $P\{Z = 1\} = 1/6$*. Същото е вярно и за другите стойности на случайната величина.*

Дефиниция 2 *Нека* $X : \Omega \to \mathbf{R}$ *е случайна величина свързана с даден опит, която приема краен брой различни стойности* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$*. Ако са ни известни вероятностите* $P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ *казваме, че е известен закона за разпределение на случайната величина* X*. Това записваме в таблица*

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Прието е стойностите на случайната величина да са подредени в таблицата в нарастващ ред.

За вероятностите в долния ред на таблицата е в сила:

$$p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Пример 2 *За случайните величини, разгледани в Пример 1, законите за разпределение са следните*

X	-1	1
P	$0,5$	$0,5$

Z	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Нека пресметнем вероятността на събитието $\{Z \leq 4\}$*. Това събитие можем да представим като сума на 4 несъвместими събития*

$$\{Z \leq 4\} = \{Z = 1\} + \{Z = 2\} + \{Z = 3\} + \{Z = 4\}.$$

По теоремата за събиране на вероятностите

$$P\{Z \leq 4\} = P\{Z = 1\} + P\{Z = 2\} + P\{Z = 3\} + P\{Z = 4\} = 4.\frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

По такъв начин можем да пресмятаме и вероятностите на други събития свързани с дадена случайна величина.

14.2 Числови характеристики на дискретни случайни величини

Нека е дадена дискретна сл. величина X с нейния закон за разпределние:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

.

- Математическо очакване.

  Дефиниция 3 *Числото $E(X) = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n$ се нарича мате-математическо очакване на случайната величина X.*

  Използват се също и понятията *средна стойност* и *средно*.

  Математическото очакване на случайната величина X е мярка за положението на стойностите на тази случайна величина върху числовата ос.

  За случайните величини X и Z от Примери 1 и 2 математическите очаквания са съответно:

$$E(X) = 0,5.(-1) + 0,5.1 = 0;$$
$$E(Z) = \frac{1}{6}.1 + \frac{1}{6}.2 + \frac{1}{6}.3 + \frac{1}{6}.4 + \frac{1}{6}.5 + \frac{1}{6}.6 = \frac{21}{6} = 3,5.$$

- Дисперсия.

  Дефиниция 4 *Числото $D(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$ се нарича дисперсия на случайната величина X.*

  Дисперсията измерва разсейването (отклонението) на стойностите на случайната величина относно математическото и очакване. Колкото са по-разпилени стойностите спрямо $E(X)$, толкова е по-голяма дисперсията.

  За случайните величини X и Z от Примери 1 и 2 дисперсиите са съответно:

$$D(X) = 0,5.(-1-0)^2 + 0,5.(1-0)^2 = 0,5 + 0,5 = 1;$$
$$D(Z) = \frac{1}{6}.(1-3,5)^2 + \frac{1}{6}.(2-3,5)^2 + \frac{1}{6}.(3-3,5)^2$$
$$+\frac{1}{6}.(4-3,5)^2 + \frac{1}{6}.(5-3,5)^2 + \frac{1}{6}.(6-3,5)^2$$
$$= \frac{8,75}{3} \approx 2,917.$$

- Стандартно отклонение е мярка за разсейването на стойностите на случайната величина относно средното, която, за разлика от дисперсията, се измерва със същите мерни единици, както математическото очакване.

Дефиниция 5 *Числото $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ се нарича стандартно отклонение на случайната величина X.*

- Свойства на математическото очакване:
  1. $E(C) = C$, където C е константа;
  2. $E(aX + b) = aE(X) + b$, където a и b са константи;
  3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, където X и Y са случайни величини.

- Свойства на дисперсията:
  1. $D(X) \geq 0$, за всяка с. величина X, като $D(X) = 0$, само когато X е константа;
  2. $D(aX + b) = a^2 D(X)$, където a и b са константи;
  3. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, където $E(X^2) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2$ и се нарича втори начален момент на случайната величина X.

14.3 Непрекъснати случайни величини

Една случайна величина наричаме непрекъсната, ако тя приема всички стойности от даден интервал.

Тъй като числата от един интервал, краен или безкраен, са неизброимо много, то ясно е, че не можем да представим закона за разпределение на такава случайна величина във вид на таблица.

Поведението на една непрекъсната случайна величина се описва с нейната функция на разпределение и нейната плътност.

Дефиниция 6 *Функцията на разпределение на непрекъснатата случайна X величина се определя по следния начин:*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \text{ за всички } x \in (-\infty, \infty).$$

Дефиниция 7 *Плътността на разпределение на непрекъсната случайна величина X се определя чрез*

$$f_X(x) = F'_X(a).$$

Основните свойства на плътностите са:
1. $f_X(x) \geq 0$ за всяко x;
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$;
3. $P(a < x \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_X(x)dx$;
4. $P(X \in [x, x + dx)) = f_X(x)dx$.
5. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y)dy$.

Сравнение между плътност на непрекъсната сл. величина и ред на разпределение на дискретна сл. величина.

дискретна	непрекъсната
$p_X(x) \geq 0$	$f_X(x) \geq 0$
$P(X = x) = p_X(x)$	$P(x \leq X < x + dx) = f_X(x)dx$
$\sum_{\forall x} p_X(x) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

14.4 Числови характеристики на непрекъснати случайни величини

Нека е дадена случайна величина X с плътност $f_X(x)$. Числовите характеристики на тази случайна величина се пресмятат по следните формули:

- Математическото очакване $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$;
- Дисперсията $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx$;
- Стандартното отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Свойствата на математическото очакване и дисперсията са същите както и при дискретните случайни величини.

Дисперсията може се пресмята и по формулата $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, като вторият момент $E(X^2)$ се пресмята по формулата $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$.

Пример 3 *Да разгледаме случайна величина X с равномерно разпределение в интервала $[0, 1]$ (Означава се $X \sim U(0, 1)$). Плътността на тази случайна величина е*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Пресмятаме:

- Математическото очакване

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x.0.dx + \int_{0}^{1} x.1.dx + \int_{1}^{\infty} x.0.dx \\ &= \int_{0}^{1} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Втория момент

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2.0.dx + \int_{0}^{1} x^2.1.dx + \int_{1}^{\infty} x^2.0.dx \\
&= \int_{0}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

- *Дисперсията*

$$
D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.
$$

14.5 Задачи

1. Дадена е случайна величина със закон за разпределение

X	-2	-1	0	3
P	$0,2$	$0,3$	p	$0,4$

Пресметнете $p =?$, $E(X) =?$, $D(X) =?$, $\sigma(X) =?$

2. За случайната величина X е известно, че $E(X) = 2$ и $D(X) = 1$. Пресметнете $E(3X + 4)$, $D(-2X + 1)$.

3. Дадена е непрекъсната случайна величина X с плътност

$$
f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 2x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \in (1, \infty) \end{cases}
$$

Пресметнете $E(X) =?$, $D(X) =?$, $\sigma(X) =?$ и $P(X \in [0,2; 0,6]$.