МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 15

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Нормално разпределение.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

15 Нормално разпределение

Сега ще разгледаме един специален случай на непрекъснати случайни величини, които имат твърде голямо приложение в статистиката и в практиката изобщо.

Дефиниция 1 *Случайната величина X има нормално разпределение с параметри a и σ^2, ако плътността и има вида*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} \text{ за } -\infty < x < \infty$$

Това се записва накратко така $X \sim N(a, \sigma^2)$. Вижда се, че нормалната плътност има два параметъра a и σ. В сила е следната теорема.

Теорема 1 *Ако $X \sim N(a, \sigma^2)$ то $E(X) = a$ и $D(X) = \sigma^2$.*

Поради това, често се казва, че X е нормално разпределена със средно a и дисперсия σ^2.

При различни значения на тези параметри се получават различни нормално разпределени случайни величини, с които могат да се опишат резултатите от един или друг случаен експеримент.

Трябва да се отбележи, че интегралът, с който се задава функцията на разпределение на нормално разпределена сл. в. X,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-a}{\sigma})^2} dy$$

не може да се пресметне по обичайния начин и да се получи в явен вид някаква функция. Единственият начин за пресмятане на стойностите на тази функция на разпределение е като пресмятаме интеграла числено. Това не е много удобно, но едно важно свойство на нормалното разпределение дава възможност да се избегнат многократни числени пресмятания на интеграли за различи a и σ^2.

Да разгледаме следната нормално разпределена случайна величина със средно $a = 0$ и дисперсия $\sigma^2 = 1$ Прието е да се означава със Z (т.е. $Z \sim N(0, 1)$). Нейната плътност е

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad z \in (-\infty, \infty)$$

и съответната функция на разпределение има вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad z \in (-\infty, \infty).$$

Тази случайна величина се нарича **стандартна нормална случайна величина.**

В сила е следната теорема.

Теорема 2 *Ако $X \sim N(a, \sigma^2)$ то случайна величина*

$$Z = \frac{X - a}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Така ако $X \sim N(a, \sigma^2)$, теоремата ни казва, че за $Z = \dfrac{X-a}{\sigma}$ е изпълнено:
1. $E(Z) = 0$
2. $\mathrm{Var}(Z) = 1$,
3. Z има нормално разпределение.

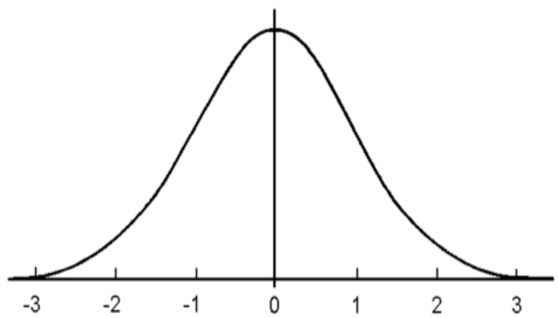
Този факт ни дава възможност да пресметнем стойностите само на стандартната нормална функция на разпределение $\Phi(z)$, да ги запишем в таблица и да използваме горното преобразувание за пресмятане на вероятности за всякакви нормални случайни величини.

Тъй като тези таблици отдавна са направени и ги има във всяка книга по вероятности и статистика ние сега ще видим само как да ги използваме. Да отбележим няколко полезни свойства.

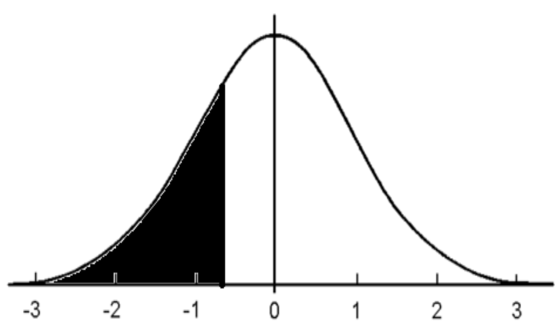
1. Плътността на Z е четна функция, т.е. изпълнено е равенството

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z).$$

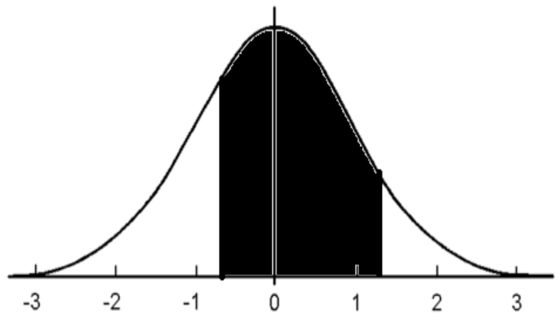
2. Графиката на $\phi(z)$ има вида (симетрична е спрямо ординатната ос)



3. Вероятността $P(Z \leq \beta) = \Phi(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \phi(z)dz$ е лицето под кривата от $-\infty$ до β.



4. Вероятността $P(\alpha < Z \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(z)dz$ е лицето под кривата от α до β.


-3
-2
-1
0
1
2
3

15.1 Използуване на таблица на стандартното нормално разпределение

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Като използваме свойствата 1.-4. и таблицата на стандартната нормална функция на разпределение ние можем да пресмятаме вероятности за всяка друга нормална случайна величина величина.

Нека $X \sim N(a, \sigma^2)$.

1. задача. Търсим $P(X \leq \beta)$. Пресмятаме $z = \frac{\beta - a}{\sigma}$.

   Тогава $P(X \leq \beta) = \Phi(z)$;

2. задача. Търсим $P(\alpha < X \leq \beta)$.

   Пресмятаме $z_1 = \frac{\alpha - a}{\sigma}$ и $z_2 = \frac{\beta - a}{\sigma}$.

   Намираме от таблицата $\Phi(z_1)$ и $\Phi(z_2)$.

   Тогава $P(\alpha < X \leq \beta) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$.

3. задача. Търсим $P(X > \beta)$. Пресмятаме $z = \frac{\beta - a}{\sigma}$.

   Тогава $P(X > \beta) = 1 - \Phi(z)$;

Забележка 1 *При използването на таблицата за стойностите на* $\Phi(z)$*, дадена в лекцията, трябва да спазваме следните правила:*

1. Ако $z \geq 0$*,тогава* $\Phi(z)$ *намираме непосредствено в таблицата.*

2. Ако $z < 0$*, намираме от таблицата* $\Phi(|z|)$ *и пресмятаме* $\Phi(z) = 1 - \Phi(|z|)$*.*

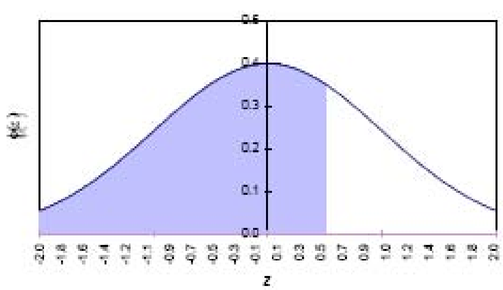
15.2 Примери

Пример 1 *Нека* $X \sim N(0, 4)$*. Да намерим* $P(X \leq 1)$*.*

Имаме $a = 0, \sigma^2 = 4$*, следователно* $\sigma = 2$*. Пресмятаме*

$$z = \frac{1 - a}{\sigma} = \frac{1 - 0}{2} = 0,5 > 0.$$

Намираме в най-дясната колона на таблицата, под z*, числото* $0,5$ *и в колоната до нея отчитаме* $\Phi(0,5) = 0,6915$*. Така* $P(X \leq 1) = \Phi(0,5) = 0,6915$*. Това е лицето на областта показана на следващата фигура.*



Пример 2 *Нека* $X \sim N(2,9)$. *Да намерим* $P(0 \leq X \leq 3)$. *Имаме* $a = 2, \sigma^2 = 9$, *следователно* $\sigma = 3$.

Последователно пресмятаме

$$z_1 = \frac{0-a}{\sigma} = \frac{0-2}{3} = -0,67$$

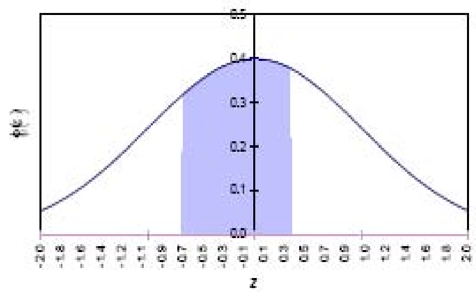
и

$$z_2 = \frac{3-a}{\sigma} = \frac{3-2}{3} = 1/3 = 0,33.$$

Намираме $\Phi(z_1) = \Phi(-0,67) = 1 - \Phi(0,67) = 1 - 0,7486 = 0,1514$ *и* $\Phi(z_2) = \Phi(0,33) = 0,6293$.

Така $P(0 \leq X \leq 3) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi(0,33) - \Phi(-0,67) = 0,6293 - 0,1514 = 0,4779$.

Това е лицето на областта показана на следващата фигура.



Пример 3 *Нека* $X \sim N(1,1)$. *Да намерим* $P(X > -0,5)$. *Имаме* $a = 1, \sigma^2 = 1$, *следователно* $\sigma = 1$.

Последователно пресмятаме

$$z = \frac{-0,5-a}{\sigma} = \frac{-0,5-1}{1} = -1,5.$$

Намираме $\Phi(z) = \Phi(-1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$.

Така $P(X > -0,5) = \Phi(-1,5) = 0,0668$.

Пример 4 *Предполага се, че ръстът на човек е нормално разпределена случайна величина с математическо очакване* $175cm$ *и стандартно отклонение* $10cm$. *Каква е вероятността случайно избран човек да е на ръст между 180cm и 190cm?*

Да означим ръста на човека с Xcm. *Това е нормално разпределена случайна величина* X *със средно* $a = 175cm$ *и стандартно отклонение* $\sigma = 10cm$. *Търсим вероятността* $P(180 < X \leq 190)$.

Пресмятаме $z_1 = \frac{180-175}{10} = 0,5$ *и* $z_2 = \frac{190-175}{10} = 1,5$. *От таблицата намираме* $\Phi(z_1) = 0,6915$ *и* $\Phi(z_2) = 0,9332$.

Така $P(180 < X \leq 190) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = 0,9332 - 0,6915 = 0,2417$ *е търсената вероятност.*

15.3 Задачи

1. Нека да предположим, че силата на късане на памучен плат (в кг.) е нормално разпределена случайна величина $X \sim N(165, 9)$. Да приемем, че плата ще се счита за дефектен ако $X \leq 162$.

а) Каква е вероятността, един случайно избран топ от произведения плат да бъде бракуван?

б) Колко трябва да бъде $a = E(X)$ така, че вероятността за бракуване да е по малка от 0,1?

2. Теглото на мъжете в един град е нормално разпределена случайна величина X със средно $a = 64,7kg$ и стандартно отклонение $\sigma = 5,4kg$. Каква е вероятността случайно избран мъж от този град да е с тегло по-малко от $54,4kg$. Ако мъжете в града са 800, какъв е процентът на тези с тегло по-малко от $54,4kg$?

3. Един биолог установил, че дължината на едномесечна риба от даден вид е нормално разпределена случайна величина $X \sim N(25, 9)$.

а) Намерете вероятността случайно хваната едномесечна риба да е с дължина между 23 и 26 см.

б) Намерете вероятността от 3 случайно хванати едномесечни риби и точно 2 да са с дължина между 23 и 26 см.

4. Случайната величина X представлява диаметъра (в мм) на съчма за лагер, и има нормално разпределение $N(5; 0,0025)$. Ако диаметърът на една годна съчма е в границите (4,98, 5,02) тя се счита за годна, а иначе се бракува.

а) Намерете вероятността една произведена съчма да е годна?

б) За деня са произведени общо 1000 съчми, какъв е приблизително дела на годните?