МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ №2

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Матрици.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

2 Матрици

2.1 Матрица от тип $m \times n$. Определение. Видове матрици: квадратни, скаларни, матрица ред, матрица стълб, единична матрица

Дефиниция 1. *Марица се нарича правоъгълна таблица с числа*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриците ще означаваме с главните латински букви, а техните елементи с малки. Първият индекс означава номера на реда, а втория - номера на колоната, в която стои елементът.

Често ще използваме и следните по-кратки означения $A = (a_{ij})_{m\times n}$ или още $A = (a_{ij})$, ако размерите на матрицата A са известни.

Пример 1. *Матрицата* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ *е с размерност* 2×3.

Когато матрицата $A = (a_{ij})_{m\times m}$ има равен брой редове и стълбове $m = n$ тя се нарича квадратна с размер $n \times n$.

Матрицата E с размерност $n \times n$, чиито елементи по главния диагонал са равни на 1, а всички останали са равни на 0, т.е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

се нарича единична матрица от ред n.

Една квадратна матица S, чиито диагонални елементи са равни на едно и също число s, а всички останали са равни на 0, т.е.

$$S = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}$$

се нарича скаларна матрица от ред n.

Когато матрицата има един ред $A = (a_{ij})_{1\times n}$ се нарича матрица ред или вектор-ред с размерност n.

Вектор ред $A = (1, 1, 2, 3)$.

Когато матрицата има един стълб $A = (a_{ij})_{m\times 1}$ се нарича матрица стълб или вектор-стълб с размерност m.

Вектор стълб $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Линейни операции с матрици: сравняване, събиране на матрици, умножение на матрица с число, транспониране. Свойства на тези операции

Когато в математиката се дефинират някакви обекти, първия въпрос, който трябва да изясним е: *Кога два такива обекта са равни?*

Дефиниция 2. *Ще казваме, че две матрици $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ са равни и ще пишем $A = B$, ако те имат едни и същи размери и съответните елементи са равни. Това означава, че и двете са с размери $m \times n$ и за всеки $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$, имаме $a_{ij} = b_{ij}$.*

Пример 2.

1. *Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ са дадени матрици.*

   Понеже размерността на A е 2×3, а на B е 3×2, то $A \neq B$, въпреки, че матриците съдържат едни и същи числа.

2. *Да разгледаме матриците $A = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ y & y^2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Двете матрици са с размерност 2×2. Те ще са равни само ако*

   $$\begin{aligned} x^2 &= 1 & \qquad y &= x \\ y &= x & \qquad y^2 &= 1 \end{aligned}$$

   Вижда се, че $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$. Освен това $x = y$. Така двете матрици ще са равни при $x = y = 1$ или при $x = y = -1$ и ще имат вида $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или $A = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

В множеството от матриците се дефинират следните операции: събиране, изваждане, умножение с число и транспониране.

Дефиниция 3. *Нека $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ са две матрици с размерност $m \times n$.*

- Сумата на матриците A и B е матрица с размери $m\times n$ и елементи $(a_{ij}+b_{ij})$. Означаваме я с $A + B$.

- Разликата ще означаваме с $A - B$. Това е матрица с размерност $m \times n$ и елементи $(a_{ij} - b_{ij})$.

- Определяме произведението на матрицата $A = (a_{ij})$ с реално число $r \in \mathbb{R}$, и означаваме rA, като матрица със същия размер като A и елементи (ra_{ij}).

Пример 3. *Нека са дадени матриците*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Да пресметнем:

1. $A + B$.
   Понеже A и B са с размерност 2×2 можем да ги съберем. Сумата е

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & 3 + 2 \\ -1 + 6 & 2 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $B - A$.
   Понеже A и B са с размерност 2×2 можем да ги извадим. Разликата е

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2 & 2 - 3 \\ 6 - (-1) & -2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. $B + C$.
   Тази операция не е възможна защото B и C имат различни размерности: B е 2×2, а C е 2×3.

4. $4C$.
   Можем да умножим всеки елемент на C с 4. Така получаваме

$$4C = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot (-2) & 4 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \end{pmatrix}.$$

5. $2A - 3B$.
   Двете марици A и B имат еднаква размерност. Първо умножаваме A с 2, после умножаваме B с 3. Матриците $2A$ и $3B$ са отново с еднаква размерност и можем да извършим изваждането. Така $2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 18 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -20 & 10 \end{pmatrix}$.

Дефиниция 4. *Нека $A = (a_{ij})$ е матрица с размерност $m \times n$. Транспонирана на матрицата A, означаваме я с A^T, е матрицата чийто i-ти стълб е i-тия ред на A, или, което е същото, чийто j-ти ред е j-тия стълб на A. Размерността на A^T е $n \times m$. Ще пишем $A^T = (a^T_{ji})$, където $a^T_{ji} = a_{ij}$. Ето няколко примера.*

Пример 4. *1. Нека* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$*. Тогава първият ред на* A *е* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *вторият ред на* A *е* $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$*. Тези два реда са съответно първи и втори стълб на* A^T*. Следователно* $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$*.*

2. Нека $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$*. Като направим редовете на* B *колони на* B^T *получаваме* $B^T = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$*.*

Матричната аритметика има някои свойства, които са аналогични на аритметиката с реални числа.

Свойства на действията с матрици

Нека A, B и C са $m \times n$ матрици и $r, s \in \mathbb{R}$.

1. $A + B = B + A$ (Събирането на матрици е комутативно.)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Събирането на матрици е асоциативно.)
3. $r(A + B) = rA + rB$ (За умножението с число и събирането на матрици е в сила дистрибутивния закон.)
4. $(r + s)A = rA + sA$ (За събирането на числа и умножението на матрица със сумата им е в сила дистрибутивния закон.)
5. $(rs)A = r(sA)$ (Асоциативно свойство при умножението на матрица с няколко числа.)
6. Съществува единствена матрица Θ с размерност $m \times n$ такава, че за всяка матрица M, с размерност $m \times n$, $M + \Theta = M$. (Тази матрица Θ се нарича нулева матрица. Всички елементи на тази матрица са равни на 0.)
7. За всяка матрица M с размерност $m \times n$ съществува матрицата $-M$ с размерност $m \times n$ такава, че $M + (-M) = \Theta$. (Матрицата $-M$ се нарича противоположна на M.)

2.3 Умножение на матрици - определение и свойства. Степен на матрица

Дефиниция 5. *Нека* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ *е вектор ред с p елемента, а* $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ *е вектор стълб с p елемента. Определяме произведението на вектор ред с вектор стълб с* *еднаква размерност и го означаваме с* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, *като числото*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p.$$

С други думи, умножаваме съответните елементи в реда и колоната и получените произведенията събираме. Получава се реално число, което можем да разглеждаме като матрица с размерност 1×1.

Пример 5. *Да умножим*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2.3 + 3.4 + 4.5 = 38.$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1.2 + 2.(-2) + (-2).(-1) + 3.2 = 2.$

Сега ще умножим произволна матрица с вектор стълб, като разглеждаме матрицата, като няколко вектори редове, записани един под друг. За да можем да извършим умножението, трябва всички редове да са е еднаква размерност и тя да е равна на размерността на вектора стълб, с който ще умножаваме.

Дефиниция 6. *Нека A е матрица с размерност $m \times p$, а $\mathbf{b}$ е вектор стълб с размерност $p \times 1$. Определяме произведението $A\mathbf{b}$, като вектор стълб с размерност $m \times 1$ чийто i-ти елемент, $1 \le i \le m$, е произведението на i-тия ред на A с вектора стълб $\mathbf{b}$.*

Пример 6. *Да умножим матрица с вектор стълб.*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1) + 2(2) + 3(-3) \\ -2(1) + 1(2) + 2(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(5) + (-2)(-1) \\ 0(5) + 3(-1) \\ -1(5) + 4(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}.$

Сега можем да разширим това умножение до умножение на произволни матрици.

Дефиниция 7. *Нека A е матрица с размерност $m \times p$, а B е матрица с размерност $p \times n$. Произведението на матриците AB е матрица с размерност $m \times n$ чийто елемент с индекси ij $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le n$, е произведението на i-тия ред на A с j-тия стълб на B. Дължината на редовете на A и дължината на колоните на B трябва да е еднаква (p), за да може това умножение да се извърши.*

Пример 7. *Извършете умноженията, които са възможни.*

1. *Нека са дадени матриците* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Понеже и двете матрици са с размерност* 2×2, *може да се извърши както умножението* AB *така и* BA. *И двете произведения ще са с размерност* 2×2.

   $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

   $$\begin{pmatrix} 1 \text{ ред на } A \times 1 \text{ стълб на } B & 1 \text{ ред на } A \times 2 \text{ стълб на } B \\ 2 \text{ ред на } A \times 1 \text{ стълб на } B & 2 \text{ ред на } A \times 2 \text{ стълб на } B \end{pmatrix} =$$

   $$\begin{pmatrix} 1(4) + 2(-2) & 1(-3) + 2(1) \\ 3(4) + 4(-2) & 3(-3) + 4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},$$

   $$BA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

   $$\begin{pmatrix} 1 \text{ ред на } B \times 1 \text{ стълб на } A & 1 \text{ ред на } B \;\; 2 \text{ стълб на } A \\ 2 \text{ ред на } B \times 1 \text{ стълб на } A & 2 \text{ ред на } B \times 2 \text{ стълб на } A \end{pmatrix} =$$

   $$\begin{pmatrix} 4(1) + (-3)(3) & 4(2) + (-3)(4) \\ -2(1) + 1(3) & -2(2) + 1(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Както се вижда, и двете умножения са възможни, но $AB \neq BA$. *Така умножението на матрици не е комутативно.*

2. *Умножението на матриците* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *не е възможно защото броя колоните на* A *е 3, а броя на редовете на* B *е 2.*

3. *Да умножим* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Уможението е възможно, произведението ще е матрица с размерност* 2×2. *Сметката е следната*

   $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1) + 2(5) + 9(-1) & 2(2) + 2(2) + 9(3) \\ -1(1) + 0(5) + 8(-1) & -1(2) + 0(2) + 8(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 35 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}.$$

Ето няколко свойства на умножението на матрици.
Нека A, B и C са матрици с подходящи размери и нека $r \in \mathbb{R}$. Тогава

1. $A(BC) = (AB)C$ (Умножението на матрици е асоциативно.)
2. $(rA)B = r(AB) = A(rB)$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $(A + B)C = AC + BC$ (Разпределително свойство.)

5. Съществува единствена квадратна матрица E с размерност $n \times n$, такава, че за всяка квадратна матрица M с размерност $n \times n$ е в сила $EM = ME = M$. Това е единичната матрица дефинирана в началото на лекцията.

Пример 8. *Нека* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *и* $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Проверете, че* $A.E = E.A = A$.

2.4 Задачи

1. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Пресметнете $C = 3A - 3B + 2E$; $D = 2A + 3B^T$; $M = 2A^T + B - 4E$.

2. Намерете за кои стойности на x са равни матриците $A = \begin{pmatrix} x & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x^2 & -x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Пресметнете AB и BA, ако е възможно.

4. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Пресметнете AB и BA, ако е възможно.

5. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пресметнете $A^3 = A.A.A$.

6. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пресметнете $B = 3.A^2 - 2.A + E$.