МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ №3

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Детерминанти.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

3 Детерминанти

3.1 Определение на детерминанта

Дефиниция 1. *На всяка квадратна матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

с размерност $n \times n$ се съпоставя, по определено правило, едно число, което се означава с

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и се нарича детерминанта на матрицата A. Използва се и означението $det(A)$.

3.2 Детерминанти от от 2-ри и от 3-ти ред. Пресмятане. Правило на Сарус. Правило на триъгълниците

Ще започнем с пресмятане на детерминати от 2 и 3 ред.

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогава детерминантата

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}.$$

Така от произведението на числата, които са на главния диагонал изваждаме произведението на числата, които са на втория диагонал.

Пример 1. *Да пресметнем* $|A| = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12(2) - 4(-3) = 24 + 8 = 32.$

За пресмятане на детерминанти от трети ред ще разгледаме две правила.

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

А) *Правило на Сарус.* За да пресметнем детерминантата $|A|$ да допишем първите две колони в дясно от вертикалната черта така:

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Умножаваме трите числа на главния диагонал и на двата диагонала успоредни на него.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} & \\ a_{21} & \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Тези три произведения взимаме със знак $+$.

Умножаваме трите числа на втория диагонал и на двата диагонала успоредни на него.

$$|A| = \left|\begin{matrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \\ & \end{matrix}$$

$$= -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Тези три произведения взимаме със знак -.

Събираме 6-те произведения със знаците им.

Пример 2. *Да пресметнем*

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{matrix}$$

$$= 1.(3).(1) + 2.(-4).2 + 3.(-2)(-2)$$
$$-3.3.2 - 1.(-4).(-2) - 2.(-2).1$$
$$= 3 - 16 + 12 - 18 - 8 + 4 = -23.$$

Б) *Правило на триъгълниците.* За да пресметнем детерминантата $|A|$ пресмятаме:

1. произведенията на елементите в следните три таблици. Те се взимат със знак $+$.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{matrix}\right|$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \ a_{12}a_{23}a_{31}, \ a_{13}a_{21}a_{32}$$

2. произведенията на елементите в следните три таблици. Те се взимат със знак -.

$$\left|\begin{matrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{matrix}\right|$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}, \ -a_{11}a_{23}a_{32}, \ \ -a_{12}a_{21}a_{33}$$

Събираме получените 6 произведения със знаците им.

Пример 3. *Да пресметнем*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(3).(1) + 2.(-4).2 + 3.(-2)(-2)$$
$$-3.3.2 - 1.(-4).(-2) - 2.(-2).1$$
$$= 3 - 16 + 12 - 18 - 8 + 4 = -23.$$

3.3 Минор и адюнгирано количество на елемент на детерминанта

Дефиниция 2. *Нека* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *е матрица с размерност* $m \times n$*. Нека* $k < m$ *и* $k < n$*. Да задраскаме кои да са* $m - k$ *реда и кои да са* $n - k$ *стълба. Получената матрица ще е квадратна с размерност* k *и за нея може да се пресметне нейната детерминанта. Тази детерминанта се нарича минор от ред* k *на матрицата* A*.*

Дефиниция 3. *Нека*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

е детерминанта от n*-ти ред. Ако задраскаме* i*-тия ред и* j*-тия стълб* ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) *на детерминантата ще получим детерминанта от* $n-1$ *ред, която ще означим с* $|A|_{ij}$ *и ще наричаме поддетерминанта съответна на елемента* a_{ij}*.*

Дефиниция 4. *Нека*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

е детерминанта от n*-ти ред. Ако* $|A|_{ij}$ *е поддетерминантата, съответна на елемента* a_{ij}*, то числото* $A_{ij} = |A|_{ij}.(-1)^{i+j}$ *наричаме адюнгирано количество съответно на елемента* a_{ij}*,* $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$*.*

3.4 Пресмятане на детерминанти от по-висок ред.

Правило на Лаплас за пресмятане на детерминанта от произволен ред.

Нека за детерминантата $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ изберем произволен ред например k и пресметнем адюнгираните количества $A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn}$. Детерминантата се пресмята по следната формула:

$$|A| = a_{k1}.A_{k1} + a_{k2}.A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

Същото твърдение е вярно и ако вместо ред пресметнем адюнгираните количества на елементите на произволен стълб.

Това правило се нарича развитие на детерминанта по ред или стълб. Вижда се, че то свежда пресмятане на детерминанта от ред n до пресмятане на n детерминанти от ред $n-1$. След като знаем как се пресмятат детерминанти от 2 и 3 ред, можем да пресмятаме и детерминанти от произволен ред.

Пример 4. *Да пресметнем най-напред детерминантата*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

като я развием по елементите на 1 ред.

Намираме адюнгираните количества

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.(3.1 - (-2)(-4)) = 3 - 8 = -5,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1).((-2).1 - (2).(-4)) = (-1).(6) = -6,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1.((-2).(-2) - 2.3) = -2.$

Сега $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1.(-5) + 2.(-6) + 3.(-2) = -5 - 12 - 6 = -23,$ *както се получи и по правилото на Сарус и по правилото на триъгълниците.*

Пример 5. *Да пресметнем сега детерминантата*

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

като я развием по елементите на 1 ред. Ясно е, че трябва да пресметнем само адюнгираните количества A_{12} и A_{14} тъй като елементите $a_{11} = 0$ и $a_{13} = 0$ и съответните им адюнгирани количества не влияят на стойността на детерминантата. Така пресмятаме по правилото на триъгълниците

$|A|_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ *и съответното адюнгирано количество е* $A_{12} = (-1)^{1+2}.2 = -2.$

$|A|_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 12$ *и съответното адюнгирано количество е* $A_{14} = (-1)^{1+4}.(12) = -12.$

Така $|A| = a_{12}.A_{12} + a_{14}.A_{14} = 3.(-2) + (-4).(-12) = 42.$

3.5 Свойства на детерминантите

В сила са следните свойства на детерминантите.

1. Ако в една детерминанта се разменят местата на два реда (стълба), се получава детерминанта с противоположна стойност.

2. Детерминанта с два равни реда(стълба) е равна на нула.

3. Ако всички елементи от даден ред (стълб) на една детерминанта се умножат с някакво число, то цялата детерминанта се умножава с това число.

4. Детерминанта, съдържаща нулев ред или нулев стълб (ред или стълб само от нули), е равна на нула.

5. Детерминанта с два пропорционални реда (стълба) е равна на нула.

6. Ако всеки елемент в i-тия ред (стълб) на една детерминанта се представя като сума $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ за всяко j, то детерминантата е равна на сумата от две детерминанти, в които всички редове (стълбове), освен i-тия, са непроменени, а в i-тия ред (стълб) на първата детерминанта са елементите a'_{ij}, а във втората – a''_{ij}.

   Пример 6.

$$|A| = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Ако всички елементи под главния диагонал на една детерминанта са равни на 0, т.е. тя е триъгълна, стойността и е равна на произведението от числата по главния диагонал, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.\dots.a_{nn}.$$

Пример 7.

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 3 & -4 \\ 0 & 10 & 23 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 12.10.(-1) = -120.$$

8. Ако елементите на даден ред(стълб) се умножат с едно и също число и получените произведения се прибавят към съответните елементи на друг ред (стълб) детерминантата не се променя. Нека

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тогава, ако r е реално число, то детерминантата

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + r.a_{11} & a_{32} + r.a_{12} & a_{33} + r.a_{13} \end{vmatrix}$$

ще е равна на A.

Пример 8. *Нека*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.0.(-1) + (-2).4.(-4) + 3.3.3 - 3.0.(-4) - 4.3.1 - (-2).3.(-1) = 41.$$

Проверете, че детерминантата

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 + (-3).1 & 4 + (-3).3 & -1 + (-3).(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix},$$

получена с прибавяне към 3 ред на 1 ред умножение с -3, също е равна на 41.

9. Ако в една детерминанта разменим местата на два реда или на два стълба, то тя си сменя знака, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3.6 Задачи

1. Пресметнете детерминантите $\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 21 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 0,4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Пресметнете детерминантите

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 21 & -23 & -43 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix}.$$

3. Пресметнете детерминантите

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & x & 1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 1,5 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Пресметнете детерминантите като използвате някое от свойствата на детерминантите

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 & 45 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & -65 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \\ 12 & 0 & -8 & -6 \\ 3 & -7 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.6.1 Отговори

1. -75; 61; 0.