МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

# ЛЕКЦИЯ №4

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

**ТЕМА: Обратна матрица и приложения. Системи линейни уравнения.**

**РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов**

**гр. Плевен 2020 год.**

# 4 Обратна матрица и приложения. Системи линейни уравнения

## 4.1 Обратна матрица - определение

Както знаем, за всяко реално число $r \neq 0$ съществува единствено реципрочно число $\frac{1}{r} = r^{-1}$, такова, че $r.\frac{1}{r} = r.r^{-1} = 1$. По аналогия с числата дефинираме обратна матрица за дадена *квадратна* матрица.

**Дефиниция 1.** *Нека* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *е квадратна матрица от ред* $n$. *Матрицата* $A^{-1}$ *с размерност* $n$ *се нарича обратна на* $A$, *ако* $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$, *т.е. произведението на матрицата и нейната обратна е равно на единичната матрица от същия ред.*

В такъв случай казваме, че матрицата $A$ е обратима.

От определението е ясно, че обратната на $A^{-1}$ е матрицата $A$, т.е. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Ако съществува, обратната матрица е единствена.

## 4.2 Съществуване на обратна матрица. Методи за намиране. Метод на адюнгираните количества.

Въпросите, на които ще отговорим са: кога съществува обратна за дадена матрица и как може да се намери?

Нека за дадена квадратна матрица $A$, да пресметнем нейната детерминанта $|A|$. Нека да пресметнем адюнгираните количества на всички елементи на матрицата $A$ и да образуваме матрицата

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нека освен това $|A| \neq 0$. Тогава, като умножим матрицата $B$ с числото$\frac{1}{|A|}$ и след това получената матрица транспонираме, получаваме $A^{-1}$, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.B^T = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Доказателството, че това е обратната матрица на $A$ не е трудно, но няма да го разглеждаме.

Вижда се, че за да можем да пресметнем обратната матрица по този начин трябва, $|A| \neq 0$. В такъв случай матрицата $A$ се нарича неособена. Ако $|A| = 0$ матрицата се нарича особена. Особените матрици нямат обратни.

**Пример 1.** *Да разгледаме матрицата* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$*. Да намерим* $|A| = 2.(-1) - 1.1 = -3$*. По-нататък имаме*

$A_{11} = (-1)^{1+1}.(-1) = -1$, $A_{12} = (-1)^{1+2}.1 = -1$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}.1 = -1$, $A_{22} = (-1)^{2+2}.2 = 2$.

*Тогава* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$*. Да проверим, че* $A.A^{-1} = E$.

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.(1/3) + 1.(1/3) & 2.(1/3) + 1.(-2/3) \\ 1.(1/3) + (-1).(1/3) & 1.(1/3) + (-1).(-2/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*По същия начин се проверява, че* $A^{-1}A = E$.

**Пример 2.** *Да разгледаме матрицата* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$*. Пресмятаме по правилото на триъгълниците, че* $|A| = -3$*. По-нататък имаме*

$A_{11} = (-1)^{1+1}.(1.1 - 2.(-2)) = 5$, $A_{12} = (-1)^{1+2}.((-1).1 - 2.(-2)) = -3$, $A_{13} = (-1)^{1+3}.((-1).2 - 2.1) = -4$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}.(0.1 - 2.2) = 4$, $A_{22} = (-1)^{2+2}.(1.1 - 2.2) = -3$, $A_{23} = (-1)^{2+3}(1.2 - 2.0) = -2$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}(0.(-2) - 1.2) = -2$, $A_{32} = (-1)^{3+2}(1.(-2) - (-1).2) = 0$, $A_{33} = (-1)^{3+3}(1.1 - (-1).0) = 1$.

*Тогава* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & -4/3 & 2/3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$*. Може да се провери, че* $A.A^{-1} = A^{-1}A = E$.

## 4.3 Метод на Гаус-Жордан. Приложение за решаване на системи линейни уравнения

Разгледаният метод за намиране на обратна матрица е удобен за матрици с размерност $2 \times 2$ и $3 \times 3$. За матрици с по-голяма размерност пресмятанията стават твърде много. Сега ще разгледаме друг метод, който има приложение и за решаване на други типове задачи. Методът е известен като метод на Гаус-Жордан.

Нека $A$ е неособена квадратна матрица с размерност $n \times n$. Да образуваме правоъгълна матрица $(A|E)$. Върху редовете на тази матрица можем да извършваме следните преобразувания:

1. Размяна на местата на кои да се два реда.
2. Умножаване на кой да е ред с число различно от 0.

3. Към кой да е ред да прибавим друг ред умножен с число. (Променя се редът, към който се извършва прибавянето).

Прилагаме поредица от такива преобразувания, докато достигнем до матрицата $(E|B)$. Тогава $A^{-1} = B$

Това твърдение ще приемем без доказателство.

Да разгледаме няколко примера.

**Пример 3.** *Да вземем отново матрицата* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Образуваме разширената матрица* $(A|E)$ *и извършваме преобразуванията:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*разменяме местата на двата реда*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 & 1 \\ 2 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*към втория ред прибавяме първия умножен с (-2)*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 3 & | & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

*умножаваме втория ред с 1/3*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

*към първия ред добавяме втория умножен с 1*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & | & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

*Така сме достигнали до разширена матрица* $(E|B)$. *Следователно* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$. *Което може да се запише и така* $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

**Пример 4.** *Нека* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Образуваме разширената матрица* $(A|E)$ *и преобразуваме:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*към втория ред прибавяме първия умножен с 1* *към третия ред прибавяме първия умножен а -2*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

*към третия ред прибавяме втория умножен с -2*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

*умножаваме третия ред с -1/3*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

*към първия ред прибавяме третия умножен с -2*

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/3 & -4/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

*Така виждаме, че* $A$ *е обратима* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & -4/3 & 2/3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. *Множителят* $1/3$ *може да се изнесе пред матрицата и да се запише във вида* $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

**Пример 5.** *Нека да разгледаме матрицата* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Образуваме разширената матрица* $(B|I)$ *и преобразуваме:*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

*към втория ред прибавяме първия умножен с 1*

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

*Поради това, че лявата половина на втория ред се състои само от нули, спираме преобразуванията. Детерминантата на* $B$ *е равна на 0, следователно* $B$ *е особена матрица и няма обратна.*

## 4.4 Системи линейни уравнения

**Дефиниция 2.** *Линейно уравнение за неизвестните* $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$ *е уравнение от вида*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots \ + a_nx_n = b.$$

Когато едни и същи променливи трябва да удовлетворяват няколко линейни уравнения, казваме, че е зададена *система линейни уравнения* за променливите $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$ :

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{1}$$

Решение на тази система се нарича всяко наредена $n-$орка $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ от стойности на променливите $x_1, x_2, \ \ldots \ x_n$ , които, заместени в уравненията на системата ги обръщат в тъждества.

**Дефиниция 3.** *Две системи линейни уравнения са еквивалентни, когато имат едни и същи решения.*

**Дефиниция 4.** *Една система линейни уравнения се нарича зависима, ако някое от уравненията е линейна комбинация на останалите. Такова уравнение се нарича уравнение следствие.*

**Дефиниция 5.** *Ако от една система се премахнат уравненията следствия, то броят на останалите уравнения се нарича ранг на системата уравнения.*

**Пример 6.** *Да разгледаме системата*

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + x_2 = 6 \end{array}$$

*има за решение наредената двойка* $(5, -1)$*, но не и наредената двойка* $(-1, 5)$.

### 4.4.1 Метод на Крамер за решаване на системи линейни уравнения

Тук ще разгледаме едно приложение на детерминантите за решаване на системи линейни уравнения. Нека е дадена системата от $n$ линейни уравнения с $n$ неизвестни:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{2}$$

Да означим с $A = ||a_{ij}||_{n\times n}$ матрицата от коефициентите пред неизвестните и нека $D = detA$, т.е.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако $D \neq 0$, то системата има единствено решение. Казва се още, че системата е определена. Решението на системата се намира по формулите на Крамер:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

където, детерминантата $D_i$ получава от детерминантата $D$ като се замени $i$ тия стълб със стълба от свободните членове. Така например

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_i & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad a \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Ако $D = 0$ са възможни два случая:

1) Ако $D = 0$ и всички $D_i = 0$, то тогава системата има безброй много решения. Такава система се нарича неопределена.

2) Ако $D = 0$ и за някое $i$, $D_i \neq 0$, то тогава системата системата няма решение. Казва се, че е несъвместима.

**Пример 7.** *Да разгледаме системата*

$$\begin{aligned} x \quad\; &+2z = 3 \\ -x + y &- 2z = -3 \\ 2x + 2y &+ z = 6. \end{aligned}$$

*Пресмятаме детерминантите:*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \; D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

*и получаваме*

$$D = -3, D_1 = -9, D_2 = 0, D_3 = 0.$$

*От тук*

$$x = \frac{D_1}{D} = 3, \; y = \frac{D_2}{D} = 0, \quad z = \frac{D_3}{D} = 0.$$

### 4.4.2 Метод на Гаус-Жордан за решаване на системи линейни уравнения

При решаването на системи линейни уравнения е удобно да се представят в матричен вид. Това позволява да се използват действията с матрици и по специално метода на Гаус-Жордан за тяхното решаване. Да разгледаме системата

$$\begin{aligned} x \quad\;\; +2z &= 3 \\ -x + y - 2z &= -3 \\ 2x + 2y + z &= 6. \end{aligned}$$

Виждаме, че матрицата от коефициентите пред неизвестните е матрицата $A$ от т 2. в Пример 3. Нейната обратна $A^{-1}$ вече е намерена. Нека да запишем системата във вида: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ където $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Тогава $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ е решението на системата.

Всъщност двете операции: намиране на обратната матрица и умножението на стълба от свободните членове с нея могат да се извършат едновременно. В резултат на това ще получим само решението на системата. За целта да съставим разширената матрица на системата $(A|\mathbf{b})$. Върху редовете на тази матрица извършваме елементарни преобразования докато я доведем до вида $(E|\mathbf{b}')$. Тогава $\mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

**Пример 8.** *Да съставим разширената матрица $(A|\mathbf{b})$ на системата дадена погоре и да извършим същите елементарни преобразувания, които използвахме за намиране на обратната матрица $A^{-1}$ в Пример 3.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ -1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

*към втория ред прибавяме първия умножен с 1*
*към третия ред прибавяме първия умножен а -2*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

*към третия ред прибавяме втория умножен с -2*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

*умножаваме третия ред с -1/3*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

*към първия ред прибавяме третия умножен с -2*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

*Така получихме отново решението на системата* $(3, 0, 0)$.

### 4.4.3 Метод на Гаус за решаване на системи линейни уравнения

Сега ще разгледаме един метод, при който се използват същите елементарни преобразувания над разширената матрица на системата, като целта е в ляво да се получи триъгълна матрица, т.е. такава, при която под главния диагонал има само нули. Методът е известен като метод на Гаус.

Ще го илюстрираме със същия пример, който вече решихме по-горе.

**Пример 9.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ -1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

*към втория ред прибавяме първия умножен с 1*
*към третия ред прибавяме първия умножен а -2*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

*към третия ред прибавяме втория умножен с -2*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

*Достигайки до този триъгълен вид на разширената матрица сме извършили така наречения прав ход в метода на Гаус.*

*Сега преписваме получената разширена матрица отново като система уравнения:*

$$\begin{aligned} x \ +2z &= 3 \\ y \qquad &= 0 \\ -3z &= 0. \end{aligned}$$

*От последното уравнение намираме* $z = 0$*, а от второто* $y = 0$*. Заместваме* $z$ *с 0 в първото уравнение и намираме* $x = 3$*. Това се нарича обратен ход в метода на Гаус.*

## 4.5 Задачи

1. Намерете обратните матрици на дадените (ако съществуват):

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ б) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ в) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Намерете обратните матрици на дадените (ако съществуват):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ б) $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ в) $C = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 \\ -13 & 11 & -3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. 3. Решете системите уравнения:

а) $\left| \begin{array}{lll} x & +2y & = 5 \\ -x & +y & = 1 \end{array} \right.$ б) $\left| \begin{array}{llll} x & +2y & +3z & = -7 \\ 2x & +y & +2z & = -8 \\ 4x & +3y & +2z & = -8 \end{array} \right.$

в) $\left| \begin{array}{llll} 2x & +2y & -3z & = 2 \\ x & -y & +2z & = 2 \\ 3x & -3y & +z & = -4 \end{array} \right.$ г) $\left| \begin{array}{llll} x & +2y & -3z & = 2 \\ 2x & -2y & +2z & = 6 \\ 3x & -2y & -z & = 6 \end{array} \right.$

д) $\left| \begin{array}{llll} x & +y & +z & = 6 \\ x & +y & -z & = 0 \\ -x & +y & +z & = 4 \end{array} \right.$ е) $\left| \begin{array}{llll} x & +2y & +3z & = -7 \\ 2x & +y & +2z & = -8 \\ 4x & +3y & +2z & = -8 \end{array} \right.$