МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 5

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Вектори.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

5 Вектори

5.1 Вектори в равнината $\mathbb{R}^2$

Дефиниция 1. *Наредена двойка точки в равнината (A, B) (което ще означаваме с $\overrightarrow{AB}$), се нарича насочена отсечка. Точката A се нарича начало, а точката B - край на насочената отсечка. Когато началото и края на насочената отсечка съвпадат тя се нарича нулева насочена отсечка $\overrightarrow{AA}$.*

Дефиниция 2. *Две насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни, ако правите AB и CD са успоредни,*

Дефиниция 3. *Две насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са равни, ако са колинеарни, имат равни дължини и една и съща посока.*

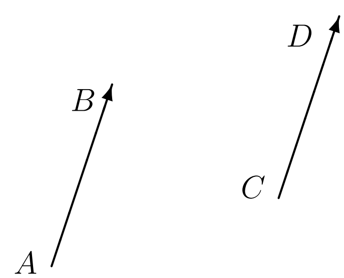


Рис. 1: Насочените отсечки AB и CD са равни.

Дефиниция 4. *Множеството от всички насочени отсечки равни на дадена насочена отсечка наричаме свободен вектор или само вектор, а всяка насочена отсечка от множеството ще наричаме представител на дадения вектор.*

Векторите ще означаваме с получерни малки латински букви.

Нека в правоъгълна координатна система Oxy в равнината изберем представител на даден вектор $\mathbf{u}$ с начало в началото O на координатната система и край в точка U. Така $\overrightarrow{OU}$ е представител на вектора $\mathbf{u}$. Нека координатите на точката U са (u_1, u_2).

По-нататък под вектор $\mathbf{u}$ ще разбираме наредената двойка реални числа (u_1, u_2).

Дефиниция 5. *Два вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ в $\mathbb{R}^2$ са равни, което ще означаваме с $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ако $u_1 = v_1$ и $u_2 = v_2$.*

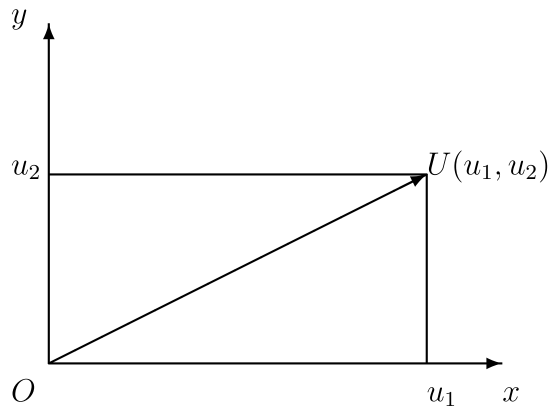


Рис. 2: Координатите на точката U отъждествяваме с вектора $\mathbf{u}$.

5.2 Линейни операции с вектори. Свойства

Дефиниция 6. *За всеки два вектора* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *и* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *в* $\mathbb{R}^2$ *определяме сумата им така*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Ако се върнем към геометрията и представим двата вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ чрез $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, то тогава сумата им $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ се представя чрез $\overrightarrow{AC}$. (Това е показано на фигура 3).

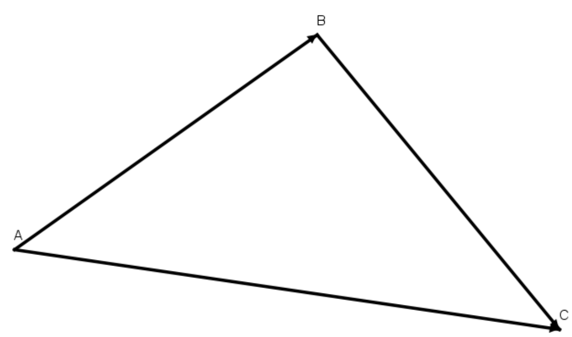


Рис. 3: Сума на два вектора.

Събирането на вектори има следните свойства:

а) За всеки два вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ имаме $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Събирането на вектори е комутативно).

б) За всеки три вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ имаме $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Събирането на вектори е асоциативно).

в) Съществува единствен вектор $\mathbf{o} = (0, 0)$, такъв, че $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$ за всеки вектор $u \in \mathbb{R}^2$.

г) За всеки вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ съществува $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2) \in \mathbb{R}^2$, такъв, че $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

На фигура 4 е показано геометрично, че събирането на вектори е комутативно. Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \mathbf{u}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{v}$, то $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} = \overrightarrow{AC}$.

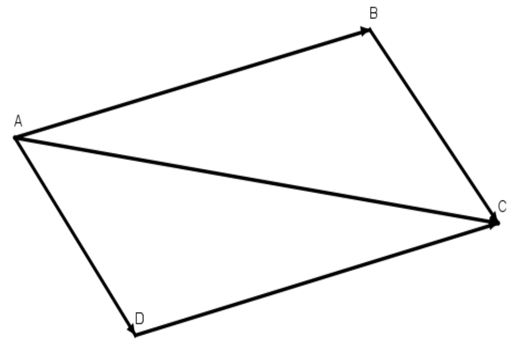


Рис. 4: Събирането на вектори е комутативно.

Дефиниция 7. *За всеки вектор* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *в* $\mathbb{R}^2$ *и всяко число* $c \in \mathbb{R}$, *определяме умножение с число*

$$c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2).$$

Пример 1. *Да предположим, че* $\mathbf{u} = (2, 1)$. *Тогава* $-2\mathbf{u} = (-4, 2)$. *Нека представим двата вектора* $\mathbf{u}$ *и* $-2\mathbf{u}$ *чрез* $\overrightarrow{OA}$ *и* $\overrightarrow{OB}$ *съответно. Тогава ще имаме следната картинка (фигура 5).*

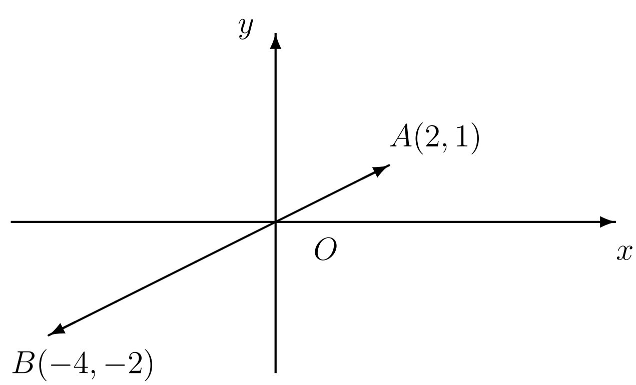


Рис. 5: Умножение на вектор с число.

Умножението на вектор с число има следните свойства:

б) За всяко число $c \in \mathbb{R}$ и вектори $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.

в) За всяки две числа $a, b \in \mathbb{R}$ и вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$.

г) За всеки две числа $a, b \in \mathbb{R}$ и вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $(ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u})$.

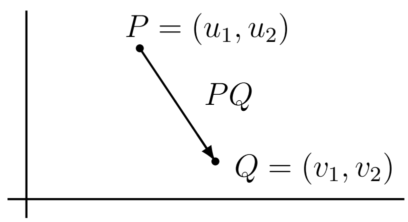
д) За всеки вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Да разгледаме следните два вектора $\mathbf{i} = (1, 0)$ и $\mathbf{j} = (0, 1)$. Можем лесно да проверим, че всеки вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ се представя по следния начин $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.

Дефиниция 8. *За даден вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ от $\mathbb{R}^2$, определяме дължина на $\mathbf{u}$ с равенството*

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Нека $P(u_1, u_2)$ и $Q(v_1, v_2)$ са две точки в равнината $\mathbb{R}^2$. Векторът с начало P и край Q е $\overrightarrow{PQ} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2)$ Тогава разстоянието между точките P и Q ($d(P, Q)$) е дължината на вектора $\overrightarrow{PQ}$,



$$\begin{aligned} d(P, Q) &= ||PQ|| = ||(v_1 - u_1, v_2 - u_2)|| \\ &= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}. \end{aligned}$$

Не е трудно да се види че за всеки вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ и всяко число $c \in \mathbb{R}$, е в сила $||c\mathbf{u}|| = |c|||\mathbf{u}||$.

Дефиниция 9. *Всеки вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ за който $||\mathbf{u}|| = 1$ се нарича единичен вектор.*

Пример 2. *Векторът $\mathbf{u} = (3, 4)$ има дължина $||\mathbf{u}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.*

Пример 3. *Разстоянието между точките $P(6, 3)$ и $Q(9, 7)$ е*

$$||PQ|| = \sqrt{(9 - 6)^2 + (7 - 3)^2} = 5.$$

Пример 4. *Векторите $\mathbf{i} = (1, 0)$ и $\mathbf{j} = (0, 1)$ са единични вектори в $\mathbb{R}^2$.*

Пример 5. *Единичният вектор в посоката на вектора $(1, 1)$ е*

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

Пример 6. *Всъщност, всички единични вектори в $\mathbb{R}^2$ имат вида*

$$(\cos\theta, \sin\theta),$$

където $\theta \in \mathbb{R}$.

5.3 Скаларно произведение на вектори - определение, свойства, приложения

Дефиниция 10. *Нека $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ са вектори в $\mathbb{R}^2$ и нека $\theta \in [0, \pi]$ е ъгълът между тях. Определяме скаларното произведение $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ така:*

$$
\mathbf{uv} = \begin{cases} ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos\theta, & \textit{ако } \mathbf{u} \neq 0 \textit{ и } \mathbf{v} \neq 0 \\ 0, & \textit{ако } \mathbf{u} \neq 0 \textit{ или } \mathbf{v} \neq 0 \end{cases} \tag{1}
$$

или

$$
\mathbf{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2. \tag{2}
$$

Дефинициите (1) и (2) са еквивалентни. В сила е следната теорема.

Теорема 1. *Нека* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *и* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *са ненулеви вектори в* $\mathbb{R}^2$ *и нека такива* $\theta \in [0, \pi]$ *е ъгълът между тях. Тогава*

$$
||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos\theta = u_1 v_1 + u_2 v_2.
$$

Казваме, че два вектора в $\mathbb{R}^2$ са ортогонални (перпендикулярни), ако ъгълът между тях е 90^0 $(\pi/2)$. От определението за скаларно произведение следва веднага, че два ненулеви вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ са ортогонални тогава и само тогава, когато $\mathbf{uv} = 0$ (скаларното им произведение е равно на нула.)

Можем да пресметнем скаларното произведение на всеки два ненулеви вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ по формулата(2) и тогава като използуваме формулата (1) можем да пресметнем ъгъла между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$

Пример 7. *Да предположим, че* $\mathbf{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *и* $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 3)$. *Тогава по формулата (2) имаме*

$$
\mathbf{uv} = 3 + 3 = 6
$$

Да пресметнем дължините на двата вектора

$$
||\mathbf{u}|| = 2 \quad \textit{ и } ||\mathbf{v}|| = 2\sqrt{3}.
$$

Сега по формула (1) следва, че

$$
\cos\theta = \frac{\mathbf{uv}}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}
$$

така $\theta = \pi/6$.

Пример 8. *Нека* $\mathbf{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *и* $\mathbf{v} = (-\sqrt{3}, 3)$. *Тогава по формула (2) имаме* $\mathbf{uv} = 0$. *Следователно* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *са ортогонални.*

5.3.1 Свойства на скаларното произведение

Да предположим, че $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ и $c \in \mathbb{R}$. Тогава

а) $\mathbf{uv} = \mathbf{vu}$

б) $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{uv}) + (\mathbf{uw})$,

в) $c(\mathbf{uv}) = (c\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u}(c\mathbf{v})$,

г) $\mathbf{uu} \geq 0$,

д) $\mathbf{uu} = 0$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{u} = 0$.

5.4 Вектори в пространството

Нека накратко обобщим казаното до тук за тримерното пространство $\mathbb{R}^3$.

Дефиниция 11. *Под вектор в тримерното пространство ще разбираме наредена тройка реални числа* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Операциите събиране и умножение на вектор с число са същите както в равнината и имат същите свойства, затова няма да ги повтаряме.

Трите единични базисни вектори сега ще означаваме с $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ и $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

За произволен вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ имаме представянето $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.

Дължината на вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е $||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Скаларното произведение на векторите $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ се пресмята по формулата $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ или по формулата $\mathbf{ab} = ||\mathbf{a}||.||\mathbf{b}|| \cos\theta$, където θ е ъгълът между двата вектора. Скаларното произведение има същите свойства както и в $\mathbb{R}^2$.

Ако са дадени 2 точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, те определят вектора $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Тогава дължината на отсечката AB е

$$||AB|| = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

5.5 Задачи

1. Дадени са векторите $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Запишете ги в координатна форма и намерете вектора $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.

2. Дадени са векторите $\mathbf{a} = (3, 2)$ и $\mathbf{b} = (-4, 4)$. Постройте ги в декартова координатна система. Намерете вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ и го постройте в същата координатна система.

3. Дадени са точките $A(1, -2, 3)$, $B(-4, 0, -5)$ и $C(3, -2, 8)$. Намерете векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и вектора $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

4. Дадени са векторите $\mathbf{a} = (3, 2, 6)$ и $\mathbf{b} = (2, -1, 0)$. Пресметнете $\mathbf{ab}$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $\cos\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

5. Дадени са векторите $\mathbf{a} = (2, -4, 0)$ и $\mathbf{b} = (-2, -1, 0)$. Проверете дали са взаимно перпендикулярни.

6. Дадени са векторите $\mathbf{a} = (3, x, 2 - x)$ и $\mathbf{b} = (1, x, -2)$. Намерете стойностите на x , за които те са взаимно перпендикулярни.

7. Дадени са върховете на триъгълника ABC: $A(2, 3)$, $B(3, 4)$ и $C(-1, -2)$. Намерете косинуса на ъгъла при върха A.