МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 6

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Функции.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

6 Функции

6.1 Множество (елемент, подмножество, празно множество), Числови множества

Множеството на всички реални числа означаваме с $\mathbb{R}$. Често използвани подмножества на $\mathbb{R}$ са интервалите.

Нека a и b са реални числа.

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ затворен интервал с крайща a и b.

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ полуотворен интервал с крайща a и b, не съдържа a.

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ полуотворен интервал с крайща a и b, не съдържа b.

$(a, b) = \{x : a < x < b\}$ отворен интервал с крайща a и b, не съдържа нито a, нито b.

$[a, \infty) = \{x : x \geq a)$ полузатворен безкраен интервал.

$(a, \infty) = \{x : x > a)$ отворен безкраен интервал.

$(-\infty, a] = \{x : x \leq a\}$ полузатворен безкраен интервал.

$(-\infty, a) = \{x : x < a\}$ отворен безкраен интервал.

Ще разглеждаме и обединения и сечения на интервали. Множествата в $\mathbb{R}$ ще означавме също и с главни латински букви.

Ще разглеждаме и крайни множества от числа, така $A = \{1, 2, -3, 4, 5\}$ е множеството, което се състои само от изброените в скобите числа.

С $\emptyset$ ще означаваме множеството, което няма елементи или *празно множество.*

Когато едно число x принадлежи на множеството A, ще казваме, че то е елемент на A и ще пишем $x \in A$.

Така $2 \in [1, 5]$, числото 2 е елемент на (принадлежи на) интервала $[2, 5]$.

Едно множество A е подмножество на множеството B, ако всеки елемент на A е елемент и на B, т.е. от $x \in A \Longrightarrow x \in B$. Това ще означаваме с $A \subseteq B$.

Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то A и B са едно и също множество и ще пишем $A = B$.

6.2 Функция - определение и начини на задаване. Дефиниционно множество и множество от стойности

За да дефинираме функция трябва да

1. зададем правило, което ни казава как да пресметнем стойността на функцията $f(x)$ за дадена реална стойност на аргумента x, и

2. да кажем за кои стойности на x това правило може да бъде приложено.

Множеството от числата, за които можем да пресметнем стойността на функцията, т.е. за които тя е дефинирана се нарича *дефиниционно множество* на функцията. Множеството от всички реални числа $f(x)$, които се получават, когато x приеме всички стойности от дефиниционното множество се нарича *множество от стойности* на функцията. Правилото, което задаваме, ще е функция само ако на всяко x от дефиниционното множество съпоставя единствена стойност $y = f(x)$ от множеството от стойности.

Например можем да дефинираме функцията f чрез правилото $y = f(x) = \sqrt{x}$ за всяко $x \geq 0$. Така правилото f съпоставя на всяко реално неотрицателно число квадратен корен от това число.

Освен чрез формула една функция може да бъде зададена по друг начин. Така, понякога имаме нужда от няколко формули за задаване на една функция:

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{за } x < 0 \\ x^2 & \text{за } x \geq 0 \end{cases}$$

сега дефиниционното множество на g се състои от всички реални числа.

Тази функция е дефинирана с различни формули в различни интервали.

Една функция може да бъде зададена и таблично:

x	$f(x)$
1	$3,50$
2	$4,00$
3	$5,00$
4	$2,00$
5	$4,25$

.

6.3 Графика на функция

За да построим графиката на една функция в декартова координатна система Oxy, трябва да нанесем в координатната система всички точки с координати (x, y) където x е число от дефиниционното множество на f и $y = f(x)$ е съответната стойност на функцията.

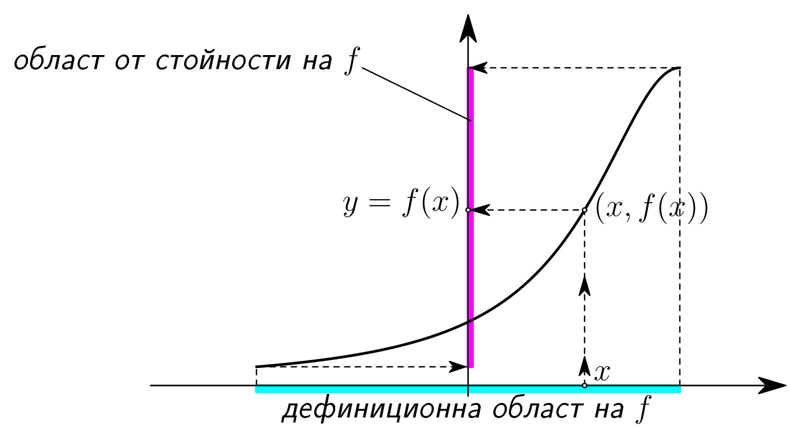

Рис. 1: Графика на функцията f. Дефиниционната област f се състои от всички числа x, за които функцията може да бъде пресметната (за които е дефинирана), а областта от стойностите е множеството от всички числа, които се получават при пресмятане на f.

6.4 Видове функции: монотонна, четна, нечетна, периодична, ограничена

Дефиниция 1 *1. Една функция се нарича растяща, ако за всеки две числа x_1 и x_2 от дефиниционното множество, за които $x_1 < x_2$ следва, че $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

2. *Една функция се нарича намаляваща, ако за всеки две числа x_1 и x_2 от дефиниционното множество, за които $x_1 < x_2$ следва, че $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

3. *Една функция се нарича четна, ако за всяко x от дефиниционното множество $-x$ също е от дефиниционното множество и $f(x) = f(-x)$.*

4. *Една функция се нарича нечетна, ако за всяко x от дефиниционното множество $-x$ също е от дефиниционното множество и $f(x) = -f(-x)$.*

5. *Една функция, с дефиниционно множество $\mathbb{R}$ се нарича периодична с период $T > 0$, ако за всяко x $f(x+T) = f(x)$ и T е най-малкото положително число с това свойство.*

6. *Една функция се нарича ограничена отгоре в дефиниционното си множество, ако съществува число M, такова, че, за всяко x от дефиниционното множество $f(x) \leq M$.*

7. *Една функция се нарича ограничена отдолу в дефиниционното си множество, ако съществува число m, такова, че, за всяко x от дефиниционното множество $f(x) \geq M$.*

8. *Една функция се нарича ограничена в дефиниционното си множество, ако съществуват числа m и M, такива, че, за всяко x от дефиниционното множество $m \leq f(x) \leq M$.*

6.5 Обратни и обратими функции

Нека f е дадена функция с дефиниционно множество D и множество от стойности S. Нека на всеки две различни числа $x_1, x_2 \in D$ съответните стойности $y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$ са различни и за всяко $y \in S$ има $x \in D$, такова, че $y = f(x)$.

Тогава можем да определи функция (ще я означаваме с f^{-1}) с дефиниционно множество S и множество от стойности D така:

Ако $x \in D$ и $y \in S$ и $y = f(x)$, то определяме $x = f^{-1}(y)$.

Така дефинираната функция f^{-1} се нарича обратна на f.

Естествено, f е обратна на f^{-1}, т.е. $(f^{-1})^{-1} = f$.

На фигура 2 са дадени графиките на една функция и нейната обратна.

Кога една функция ще има обратна?

Когато функцията е строго растяща (както е на фигура 2), тогава са изпълнени условията за обратимост. Също така, когато функцията е строго намаляваща, тя също ще е обратима.

6.6 Основни елементарни функции

- Алгебрични (полиноми) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Дефиниционно множество $(-\infty, \infty)$. Числата $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ се наричат коефициенти на полинома. Най-високата степен на x, n се нарича степен на полинома.

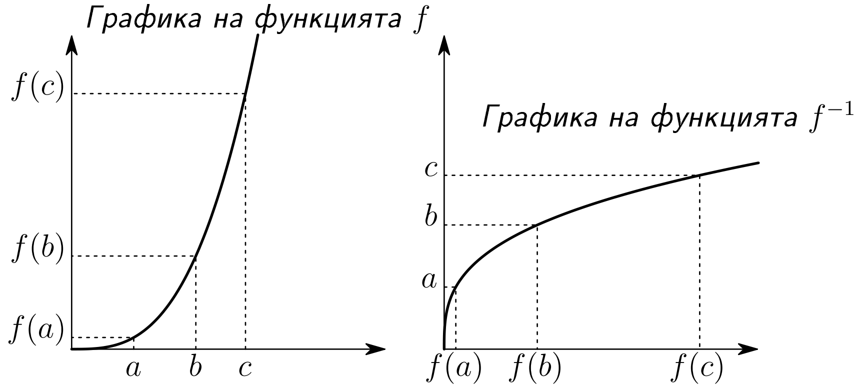

Рис. 2: Графики на обратни функции.

Пример 1 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 4$ *е полином от четвърта степен.*

- Дробно-рационални (Частно на два полинома).

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Дефиниционното множество на една дробно-рационална функция се състои от всички реални числа, за които знаменателя е различен от 0, т.е. $D = \{x : x \in \mathbb{R}, b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$.

Пример 2 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ *е с дефиниционно множество* $D = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0\}$ *или* $D = \{\forall x \neq \pm 1\}$.

- Ирационални функции (в които участва и действие коренуване).

Пример 3 $f(x) = \sqrt{x+5}$ *има дефиниционно множество* $D = \{x : x \geq -5\} = [-5, \infty)$. *Множеството от стойности е* $[0, \infty)$.

- Показателни (експоненциални) функции. $f(x) = a^x$, където $a > 0, a = 1$. Дефиниционното множество на всяка показателна фукция е $(-\infty, \infty)$, а множеството от стойности е $(0, \infty)$. При $a > 1$ показателната функция е строго растяща, а при $0 < a < 1$ е строго намаляваща.

- Логаритмични функции. $f(x) = \log_a x$, където $a > 0, a \neq 1$. Дефиниционното множество на всяка логаритмична функция е $(-0, \infty)$, а множеството от стойности е $(-\infty, \infty)$. При $a > 1$ логаритмичната функция е строго растяща, а при $0 < a < 1$ е строго намаляваща.

  Показателната и логаритмичната функция с една и съща основа са обратни една на друга. В сила са следните равенства:
  За всяко $x \in (-\infty, \infty)$, $\log_a a^x = x$. *За всяко* $x \in (0, \infty)$, $a^{\log_a x} = x$.

- Тригонометрични функции.

  $f(x) = \sin x$ Дефиниционно множество $(-\infty, \infty)$, множество от стойности $[-1, 1]$. Периодична с период $T = 2\pi$.

  $f(x) = \cos x$ Дефиниционно множество $(-\infty, \infty)$, множество от стойности $[-1, 1]$. Периодична с период $T = 2\pi$.

  $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ Дефиниционно множество $\{x : \cos x \neq 0\}$, множество от стойности $(-\infty, \infty)$. Периодична с период $T = \pi$.

  $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ Дефиниционно множество $\{x : \sin x \neq 0\}$, множество от стойности $(-\infty, \infty)$. Периодична с период $T = \pi$.

6.7 Линейна, квадратна и дробно-линейна функция

Тук ще разгледаме три най-прости, но често срещани елементарни функции.

6.7.1 Линейна функция

Функция зададена с формулата

$$f(x) = kx + b,$$

където k и b са константи се нарича *линейна функция*. Нейната графика е права линия. Константите k и b се наричат съответно *ъглов коефициент* и *y-отрез* на правата. Обратно, всяка права линия, която не е вертикална (не е успоредна на оста Oy) е графика на някоя линейна функция.

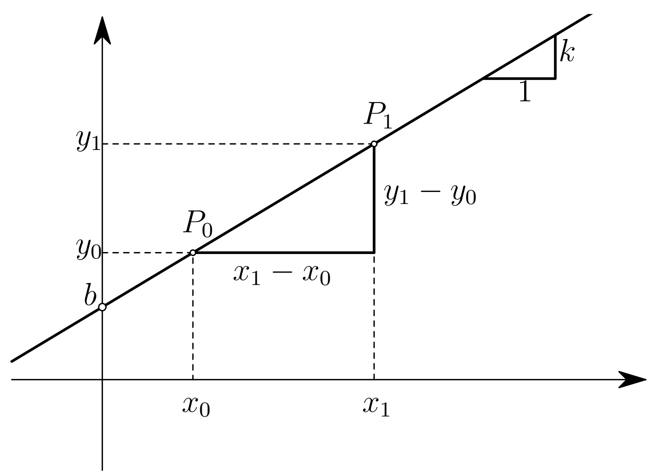

Рис. 3: Правата линия е графика на функцията $f(x) = kx + b$. Тя пресича оста Oy в точката b, и отношението между нарастванията на y и x, когато се преместим от една точка в друга по правата е $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = k$.

Ако ние знаем координатите на две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) от дадена права линия, то ние можем да намерим ъгловия коефициент k по формулата

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Тогава линейната функция, чиято графика е тази линия е $y = k(x - x_0) + y_0$.

Когато ъгловият коефициент на линейната функция е равен на 0, то тя ще има вида $y = y_0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, т.е. тя ще е константа.

Когато ъгловия коефициент $k > 0$ линейната функция ще е строго растяща. Да се убедим, че е така. Нека $x_1 < x_2$. Съответните функционални стойности са $y_1 = kx_1 + b$ и $y_2 = kx_2 + b$. Сега $y_2 - y_1 = kx_2 + b - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1) > 0$, защото $k > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$.

По същия начин можем да проверим, че ако $k < 0$, то линейната функция ще е строго намаляваща.

Така и в двата случая (при $k > 0$ и при $k < 0$) линейната функция е обратима. Обратната функция се получава като се изрази x чрез y от уравнението $y = kx + b$, така $x = (y - b)/k = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$.

Пример 4 *Да разгледаме функцията $y = 2x - 4$. За нея $k = 2 > 0$ и тя е обратима. Нека изразим x чрез y. Имаме $y + 4 = 2x$ или $2x = y + 4$. Тогава $x = (y + 4)/2 = \frac{1}{2}y + \frac{4}{2} = 0,5y + 2$. Така обратната функция е $x = 0,5y + 2$.*

6.7.2 Квадратна функция

Дефиниция 2 *Функцията $y = ax^2 + bx + c$, където a, b и c са реални числа, като $a \neq 0$ се нарича квадратна функция.*

Тъй като в пресмятането на стойността на функцията за дадено x участват само действията събиране и умножение, тази функция е дефинирана за вяко реално x, т.е. дефиниционното множество е $\mathbb{R}$.

Графиката на квадратната функция е парабола. На фигура 4 е дадена графика на квадратна функция за която коефициентът $a > 0$. На графиката са дадени точките, които определят положението на параболата в координатната система. Това са: $(0, c)$ - пресечната точка с оста Oy; (x_0, y_0) върхът на параболата, $(x_1, 0)$ $(x_2, 0)$ пресечните точки на параболата с абсцисната ос. Това са корените на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, когато са реални числа.

Вижда се, че при $a > 0$ квадратната функция ще е намаляваща в интервала $(-\infty, x_0)$ и ще е растяща в интервала (x_0, ∞). Нейната най-малка стойност е $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$. Следователно, множеството от стойности на тази функция е интервала $[y_0, \infty)$. Поради това, че квадратната функция не е строго монотонна в цялото си дефиниционно множество тя не е обратима.

6.8 Дробно-линейна функция

Дефиниция 3 *Функцията $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, където a, b, c и d са реални числа, като $c \neq 0$ се нарича дробно-линейна функция. Дефиниционното множество се състои от всички $x \neq -d/c$.*

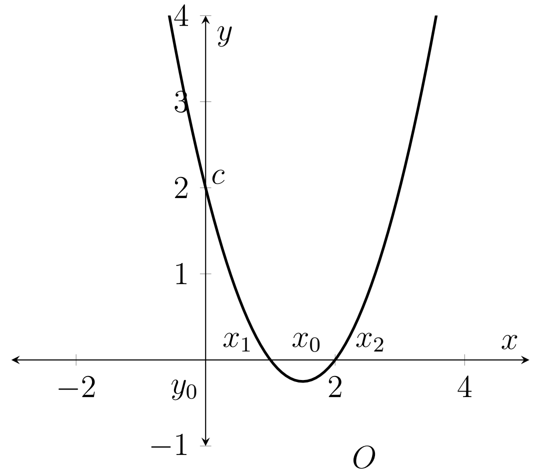

Рис. 4: Графика на квадратна функция при $a > 0$.

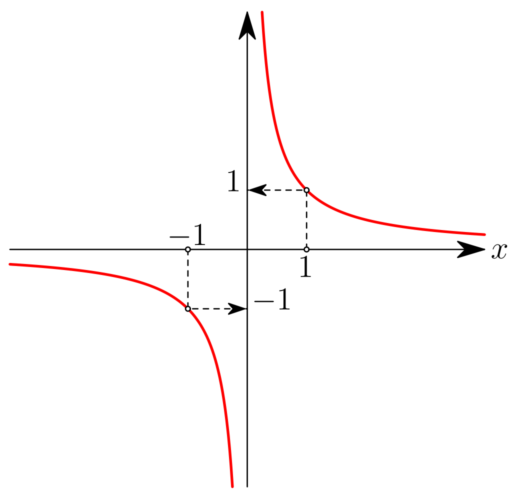

Рис. 5: Графика на функцията $y = 1/x$.

В частния случай $y = \frac{b}{x}, x \neq 0$ се нарича също и обратна пропорционалност. Нека разгледаме този частен случай като предполагаме, че $b > 0$. Тогава множеството от стойности ще $R = \{\forall x \neq 0\}$. Функцията ще е строго намаляваща. На фигура 5 е показана графиката на $y = 1/x$.

6.9 Задачи

1. Пресметнете стойностите на дадените функции за зададените значения на аргумента.

а) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$ при $x = 2$,$x = -2$,$x = 0$, б) $y = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 3, & x > 1 \end{cases}$ при $x = -2$, $x = 0,5$, $x = 2$.

2. Определете дефиниционното множество на всяка от функциите.

а) $y = x^2 - 3x + 3$, б) $y = \dfrac{x-3}{x+4}$, в) $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 2x + 2}$, г) $y = \sqrt{2x-4}$
д) $y = \log_2 x$, е) $y = \sqrt[3]{x+4}$ ж) $y = \log_3(x-5)$.