МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ №7

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Числови редици. Граница на редица. Граница и непрекъснатост на функция.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

7 Числови редици. Граница на редица. Граница и непрекъснатост на функция

7.1 Числова редица. Дефиниции за граница, сходяща и разходяща числова редица. Една специална редица. Неперово число.

Числовата редица е частен случай на функция, чието дефиниционно множество е множеството на естествените числа или някое негово подмножество. С други думи числовата редица е нареден списък от реални числа

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots, a_n, \ldots$$

Ще използваме често и следното означение

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Понякога номерата не са всичките естествени числа, а само част от тях, например само четните:

$$a_2, \quad a_4, \quad a_6, \quad a_8, \quad \ldots, a_{2n}, \ldots$$

или номерирането започва от 5

$$\{a_n\}_{n=5}^{\infty}.$$

За безкрайните числови редици е много важно понятието *граница*.

Неформалното (интуитивно понятие за граница) е следното. Числото L е граница на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ако елементите на редицата "стават все по близки до числото L" с нарастване на номера (индекса) на елемента.

Това определение не е съвсем точно, защото понятието близко, по-близко, не е математическо. Затова ще дадем строга дефиниция на граница.

Дефиниция 1 *Нека (c, d) е отворен интервал. Ще казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$* се съдържа в интервала от известно място нататък *ако съществува номер N такъв, че a_n е в интервала (c, d) за всяко $n \geq N$.*

(Членовете $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$ могат да принадлежат, а могат и да не принадлежат на интервала (c, d), но всички останали *са* в интервала (c, d).)

Дефиниция 2 *Ще казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$* е сходяща към *L (или , което същото, редицата има за граница числото L), ако за всяко реално число $\varepsilon > 0$, редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от известно място нататък се съдържа в интервала $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.*

Това ще пишем най-често така $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ или $a_n \to L, \quad n \to \infty$.

С други думи, няма значение колко малък интервал около L ще изберем, трябва всички членове на редицата, започвайки от някой номер нататък да са в този интервал.

Пример 1 *Сега ще използваме тази дефиниция за да докажем, че редицата* $a_n = 1/n, n = 1, 2, \ldots,$ *има за граница* $L = 0$

Нека $\varepsilon > 0$ *е произволно фиксирано число. Нека да разгледаме числото* $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. *От свойствата на естествените числа, знаем, че има естествено число* $N > \frac{1}{\varepsilon}$. *Следователно и всички естествени числа* $n \geq N > \frac{1}{\varepsilon}$. *Така за всяко* $n \geq N$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. *Следователно, за всяко* $n \geq N$, $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, *т.е.* $0 - \varepsilon < \frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$. *Съгласно дадената дефиниция и това, че* ε *е произволно следва, че*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

В сила са следните теореми за граници на редици.

Теорема 1 *Ако* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *и* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, *то*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$;
2. $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$;
3. $\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = A.B$;
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ *ако* $b_n \neq 0$ *и* $B \neq 0$.

Теорема 2 *(Теорема за двамата полицаи) Ако* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *и* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ *и* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *за всяко* n, *то* $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Теорема 3 *(Теорема за сходимост на монотонна редица) Ако редицата* a_n *е монотонно растяща, т.е.* $a_n \leq a_{n+1}$ *за всяко* n *и е ограничена отгоре* $a_n \leq M$ *за всяко* n, *то редицата непременно е сходяща към някакво число* $L \leq M$. *Аналогично, ако редицата е монотонно намаляваща и ограничена отдолу, то тя е сходяща.*

Пример 2 *Да се намери*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{4n^3+2}.$$

Процедурата е следната. Да изнесем пред скоби най-високите степени на n *в числителя и знаменателя. В числителя тя е* n, *а в знаменателя е* n^3. *Получаваме*

$$\begin{aligned} \frac{n^2+1}{4n^3+2} &= \tfrac{n(1+1/n^2)}{n^3(4+2/n^3)} \\ &= \tfrac{1}{n^2} \tfrac{1+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n^3}}. \end{aligned}$$

Както вече видяхме $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. *Като използваме тази граница и теоремите за събиране, умножение, деление и коренуване на граници намираме*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n^3}} = 0.\frac{\sqrt{1+0}}{4+0} = 0.$$

С това границата е намерена.

Пример 3 *Може да се докаже, че редицата* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n = 1, 2, \ldots$ *е сходяща. Границата и се означава с* e, *т.е.* $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. *Числото* e *е ирационално. С точност до 4 знак е* $e \approx 2,7182$.

7.2 Експоненциална функция. Натурален логаритъм

7.2.1 Експоненциална функция

Нека да си припомним най-напред степенуването с цял положителен показател n. Така

$$2^n = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \qquad (n \text{ множителя})$$

$$10^n = 10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10 \qquad (n \text{ н множителя})$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right) \qquad (n \text{ множителя})$$

Основните свойства на степените са:

$$a^{m+n} = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m+n} \qquad (m+n \text{ множителя})$$

$$= \underbrace{(a \times a \times a \times \ldots \times a)}_{m} \times \underbrace{(a \times a \times a \times \ldots \times a)}_{n} = a^m \times a^n$$

и също

$$a^{mn} = \underbrace{(a \times a \times a \times \ldots \times a)}_{mn} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a \times a \times a \times \ldots \times a)}_{m} \times \ldots \times \underbrace{(a \times a \times a \times \ldots \times a)}_{m}}_{n} = (a^m)^n.$$

По-нататък

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

и (като следствие)

$$a^{-n} = a^{n\times(-1)} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}$$

(където n е произволно цяло число). Като пример за тези разширения на степенуването да забележим, че

$$a = a^1 = a^{(-1)\times(-1)} = \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{1/a} = a.$$

Степен с дробен показател:

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \qquad a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$$

$$a^{1/4} = \sqrt[4]{a} \qquad a^{1/5} = \sqrt[5]{a}$$

Това се съгласува с предишните означения: Определяме n-ти корен от едно реално число a е друго реално число b такова, че неговата n-та степен е равна на a, т..е $b^n = a$. Означава се с $\sqrt[n]{a}$.

По-нататък определяме за произволна рационална степен

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Като използваме това определение за степен с рационален показател, можем да установим същите свойства, както и при степените с цял положителен показател.

Поради това, че искаме да използуваме само реални числа, то при коренуването с четен корен, подкренното число трябва да е по-голямо или равно на нула. По тази причина и поради това, че ще искаме да определим a^x за произволни реални степени x, ще трябва да се ограничим с $a > 0$ за да не получаваме като резултат комплексни числа.

Стойността на a^x може да се определи, като *граница*: Нека $r_1, r_2, \ldots, r_n \ldots$ е редица от *рационални* числа, която има граница x ($\lim_{n\to\infty} r_n = x$). Тогава определяме

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

По нататък винаги ше считаме, че основата е положително реално число. Действията със степени с реален показател са същите както и свойствата на степените с рационален показател.

Трябва да запомним, че показателната функция $f(x) = a^x$ има дефиниционна област $x \in (-\infty, \infty)$ и множество от стойности $y \in (0, \infty)$.

Една специална показателна функция е e^x, когато основата е Неперовото число e дефинирано в предната точка.

7.2.2 Натурален логаритъм. Логаритмична функция

При $a > 0, a \neq 1$ логаритмичната функция се определя от равенството

$$a^{\log_a x} = x, \text{ за всяко положително реално число } x.$$

Така функцията $y = \log_a x$ има дефиниционно множество $(0, \infty)$и множество от стойности $(-\infty, \infty)$.

Отрицателните числа и нулата нямат логаритми.

Свойствата на логаритмите са следствие от свойствата на степените. Нека да ги припомним накратко:

$$\begin{aligned}
&\log_a A.B = \log_a A + \log_a B, \quad \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B,\\
&\log_a A^n = n \log_a A, \quad \log_{a^n} A = \frac{1}{n} \log_a A,\\
&\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0.
\end{aligned}$$

Два често използвани частни случаи са:

При $a = 10$ (десетичен логаритъм), който ще означаваме $\lg A = \log_{10} A$.

При $a = e$ (натурален логаритъм), който ще означаваме, $\ln A = \log_e A$

7.3 Граница на функция

Ако f е дадена функция, ще казваме, че $f(x)$ има за граница числото L, при x клонящо към a и ще пишем

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

когато стойността $f(x)$ на функцията става все по близка до L, щом x става все по близко до a.

Ще използваме и следното алтернативно означение

$$f(x) \to L \quad \text{при} \quad x \to a,$$

(и ще казваме "$f(x)$ клони към L, когато x клони към a").

Пример 4 *Ако $f(x) = x + 3$ тогава*

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 7,$$

е вярно, защото ако заместим x с числа близки до 4 в $f(x) = x + 3$ резултатът ще е число близко до 7.

Пример 5 *Заместване на числа за познаване на границата. Каква е (ако съществува) границата*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}?$$

Тук $f(x) = (x^2 - 2x)/(x^2 - 4)$ и $a = 2$. Нека първо да опитаме да заместим $x = 2$. Това води до

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{2^2 - 4} = \frac{0}{0},$$

което не съществува. Сега ще опитаме да заместваме x със стойности близки до 2 но различни от 2. От стойностите в таблицата стигаме до предположението, че $f(x)$ клони към 0.5.

x	$x^2 - 2x$
3,000000	0,600000
2,500000	0,555556
2,100000	0,512195
2,010000	0,501247
2,001000	0,500125

x	$x^2 - 4$
1,000000	1,009990
0,500000	1,009980
0,100000	1,009899
0,010000	1,008991
0,001000	1,000000

Таблица 1: Намиране на граница чрез заместване на стойности на x "близки до a." (Стойностите на числителя и знаменателя са закръглени до 6 знака след запетаята.)

Пример 6 *Понякога заместването води до грешни изводи. В предния пример ние използваме понятието близко за да познаем границата. Нека видим, как това може да ни заблуди. Да разгледаме функцията*

$$g(x) = \frac{101000x}{100000x + 1}$$

и да се опитаме да познаем границата $\lim_{x\to 0} g(x)$.

Сега като заместваме x с малки стойности, например $0,1,\ 0,01$, ще направим извода, че границата е 1.000. Замествайки x с много, много малки стойности, ще видим, че границата е 0.

7.4 Формална дефиниция за граница на функция

Понятието граница е основно в анализа и ще се среща навсякъде по-нататък. За това е добре, когато в следващите лекции се използва граница на функция, обучаемите да се върнат и да прочетат пак дефиницията.

Дефиниция 3 *Ще казваме, че числото L е граница на функцията $f(x)$ при $x \to a$, (пишем $\lim_{x\to a} f(x) = L$), когато:*

1. *$f(x)$ е дефинирана в интервал, съдържащ a, но самото число a не е длъжно да принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$;*

2. *за всяко число $\varepsilon > 0$ можем да намерим число $\delta > 0$ такова, че за всички x от дефиниционното множество на f е изпълнено:*

$$\text{Ако } |x-a| < \delta, \text{ то } |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1}$$

Образно казано, ако вземем интервал $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, трябва да намерим δ така, че за всяко $x \in (a-\delta, a+\delta)$ и $x \neq a$, $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

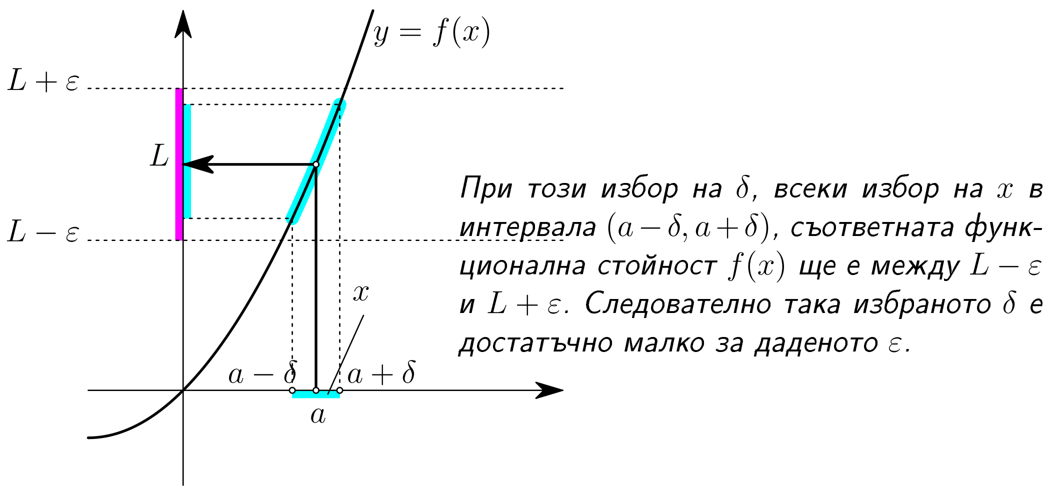

Рис. 1: Граница на функция

Пример 7 *Да докажем, че $\lim_{x\to 5} 2x+1 = 11$. Имаме $f(x) = 2x+1$, $a = 5$ и $L = 11$. Нека вземем произволно положително ε. Ще изберем $\delta > 0$, така, че от $|x-5| < \delta$ да следва $|f(x) - 11| < \varepsilon$.*

$$|f(x) - L| = \big|(2x+1) - 11\big| = |2x - 10| = 2 \cdot |x-5| = 2 \cdot |x-a|.$$

Така, ако $2|x-a| < \varepsilon$, то $|f(x) - L| < \varepsilon$, т.е.

$$\text{Ако} |x-a| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ то } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Следователно можем да изберем $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Сега, независимо от това, колко е голямо числото $\varepsilon > 0$ ние имаме δ също положително и така, че $|x-5| < \delta$ да ни гарантира, че $|(2x+1) - 11| < \varepsilon$. Съгласно дефиницията това показва, че $\lim_{x\to 5} 2x+1 = 11$.

7.5 Пресмятане на граници. Основни граници. Разкриване на неопределености

1. Следните основни граници ще използваме по-нататък.

   (a) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ при $a \neq 0$;

   (b) $\lim_{x\to 0} x^n = 0$, при $n > 0$; $\lim_{x\to 0} x^n = \infty$, при $n < 0$;

   (c) $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$, при $n > 0$; $\lim_{x\to\infty} x^n = 0$, при $n < 0$;

   (d) $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, при $a > 1$; $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, при $0 < a < 1$;

   (e) $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, при $a > 1$; $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, при $0 < a < 1$;

   (f) $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$, при $a > 1$; $\lim_{x\to\infty} \log_a x = 0$, при $0 < a < 1$;

   (g) $\lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty$, при $a > 1$; $\lim_{x\to 0+} \log_a x = \infty$, при $0 < a < 1$.

2. При пресмятането на граници ще използваме и следните теореми, които са аналогични на теоремите за граници на числови редици.

   Теорема 4 *Ако* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim_{x\to a} f(x) = B$, *то*

   (a) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$*;*

   (b) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = A - B$*;*

   (c) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = A.B$*;*

   (d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ *ако* $g(x) \neq 0$ *и* $B \neq 0$.

   Теорема 5 *(Теорема за двамата полицаи) Ако* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim_{x\to a} g(x) = A$ *и* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *за всяко* x, *то* $\lim_{x\to a} h(x) = A$.

3. Формални правила за пресмятане на граници. Разкриване на неопределености.

   При пресмятането на граница на функция $f(x)$, когато x клони към дадено реално число a, заместваме в $f(x)$, x с a и ако можем да извършим пресмятанията (т.е. ако a е от дефиниционното множество на f), то $f(a)$ е търсената граница.

   Пример 8 *Да намерим границата* $\lim_{x\to 3}(4x^2 + 3x - 7)$. *Заместваме* x *с 3 и пресмятаме*

   $$\lim_{x\to 3}(4x^2 + 3x - 7) = 4.3^2 + 3.3 - 7 = 36 + 9 = 7 = 38.$$

   Да намерим границата $\lim_{x\to 3} \frac{4x^2+3x-7}{2-x^2}$. *Заместваме* x *с 3 и пресмятаме*

   $$\lim_{x\to 3} \frac{4x^2 + 3x - 7}{2 - x^2} = \frac{4.3^2 + 3.3 - 7}{2 - 3^2} = \frac{36 + 9 - 7}{2 - 9} = -\frac{38}{7}.$$

В някои случаи при пресмятане на граница на частно на две функции се получава неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$. За да отстраним такава неопределеност преобразуваме числителя и знаменателя на дробта, за да я съкратим и после отново заместваме x с граничната му стойност.

Пример 9 *Да намерим границата* $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$*. Заместваме x с 3 и пресмятаме*

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{36+9-7}{2-9} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Разлагаме числителя на прости множители, съкращаваме дробта и пак заместваме x с 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6.$$

Пример 10 *Да намерим границата* $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$*. Заместваме x с 2 и пресмятаме*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{2-2}{4-4} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Разлагаме знаменателя на прости множители, съкращаваме дробта и пак заместваме x с 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

В следващия пример няма неопределеност.

Пример 11 *Да намерим границата* $\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{x-4}$*. Заместваме x с 4 и пресмятаме*

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{x-4} = \frac{4^2}{4-4} = \frac{16}{0} = \infty.$$

Граница на функция, когато $x\to\infty$. В такива случаи непосредственото заместване на x с ∞ е недопустимо. Преобразуваме функцията така, че да зависи вместо от x, от $1/x$. Сега като използваме основна граница (c) от списъка по-нагоре, заместваме $1/x$ с 0.

Пример 12 *Да намерим границата* $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x-4}$*. Изнасяме пред скоби x в числителя и знаменателя. Съкращаваме го и заместваме $1/x$ с 0.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(2+\frac{3}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{4}{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$

Пример 13 *Да намерим границата* $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-4}$*. Изнасяме пред скоби x^2 в числителя и знаменателя. Съкращаваме го и заместваме $1/x$ с 0.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{4}{x^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$$

Пример 14 *Да намерим границата* $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1}$*. Изнасяме пред скоби* x^2 *в числителя и знаменателя. Съкращаваме го и заместваме* $1/x$ *с 0.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(1+\frac{3}{x^2})}{\cancel{x^2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

7.6 Непрекъснатост на функция

Дефиниция 4 *(Непрекъснатост в точка.) Нека* $y=f(x)$ *е дадена функция и интервалът* (a,b) *се съдържа в дефиниционното и множество и нека* $x_0\in(a,b)$*. Функцията* f *е непрекъсната в точката* x_0*, ако* $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$*.*

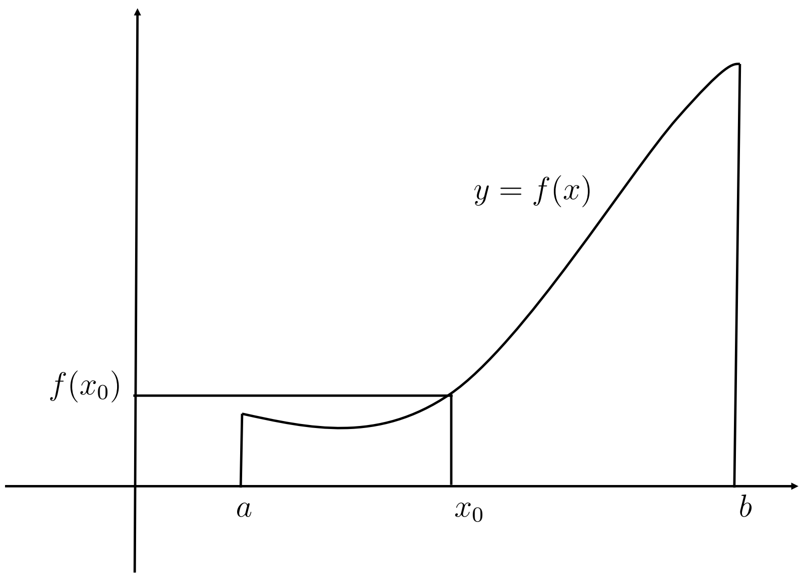

Рис. 2: Функцията f е непрекъсната в точката x_0.

Дефиниция 5 *(Непрекъснатост в интервал.) Ако* f *е дефинирана в интервала* (a,b) *и е непрекъсната във всяка точка на този интервал, казваме, че* f *е непрекъсната в интервала* (a,b)*.*

7.7 Задачи

1. Пресметнете границите а) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-4}$, б) Да намерим границата $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.
2. Пресметнете границите а) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2+2}$, б) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{3x^2+1}$, в)$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+1}{x^2+x-7}$.
3. Пресметнете границите а)$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{3^x}$, б) $\lim_{x\to 0}\frac{5^x+1}{3x^2+1}$.