МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 8

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Производна и диференциал на функция.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

8 Производна и диференциал на функция

8.1 Производна на функция - определение, геометричен и механичен смисъл. Производната като скорост на протичане на даден процес

Преди да дадем строга дефиниция на понятието производна ще разгледаме две ситуации, които водят до това понятие. Нека е дадена функцията $y = f(x)$. Да построим графиката на функцията и да изберем две точки P и Q, лежащи на нея. Правата, свързваща точките P и Q се нарича секуща. Нека да предположим, че точката P е фиксирана, а точката Q може да се движи по графиката на функцията като се приближава към P. По такъв начин секущата PQ ще се приближава към права линия, която има с графиката само една обща точка P. Тази права се нарича допирателна към кривата в т. P.

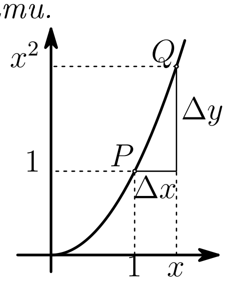
С други думи допирателната в т. P е граничното положение на секущата PQ, когато точката Q, оставайки върху графиката, става произволно близка до P.

Пример 1 *Допирателна към парабола. Да разгледаме функцията $f(x) = x^2$, и точката $P(1,1)$. Знаем, че графиката на f е парабола.*

Знаем, че произволна права през точката $P(1,1)$ има уравнение

$$y - 1 = m(x - 1)$$

където m е ъгловия коефициент на правата. Така за да намерим уравненията на секущата и на допирателната е достатъчно да намерим техните ъглови коефициенти.



Нека Q е друга точка от параболата с координати (x, x^2). За определеност да считаме, че $x > 1$, както е на графиката. Сега можем да приближаваме Q към P като приближаваме x към 1 така, че x да остава различно от 1, за бъдат точките P и Q различни и да определят една права. Правата през точките $(1,1)$, (x, x^2) има ъглов коефициент

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1.$$

Сега не е трудно да пресметнем, че

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Така намираме, че допирателната към параболата $y = x^2$ *в точката* $(1, 1)$ *има уравнение*

$$y - 1 = 2(x - 1), \text{ т.е. } y = 2x - 1.$$

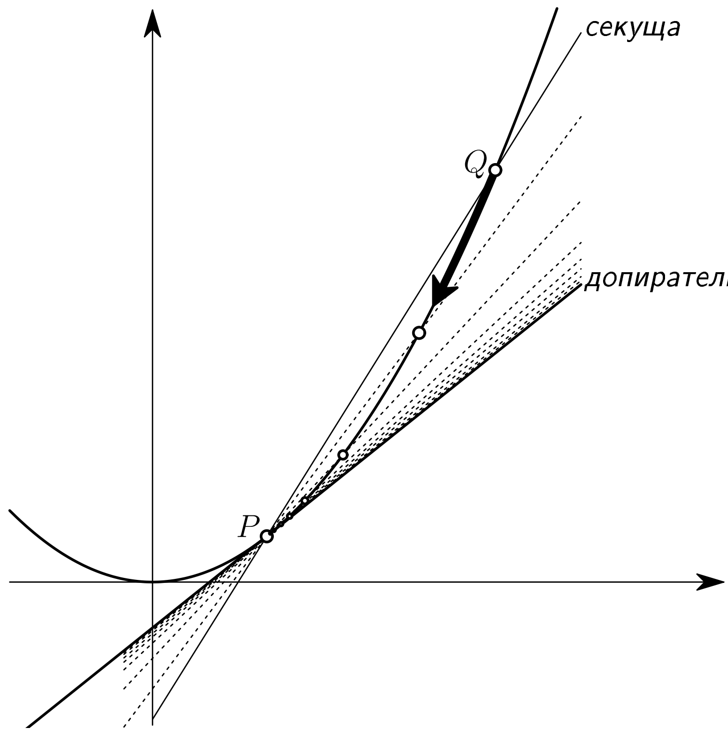
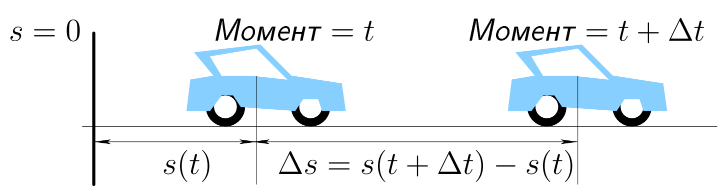


Рис. 1: Построяваме на допирателната като оставим $Q \to P$

8.2 Моментна скорост

Когато карате колата си, вие гледате показанието на скоростомера. Всеки знае, че стрелката не показва постоянно една и съща скорост. В различните моменти от време скоростта, с която се движи колата е различна. Затова има смисъл да се говори за "моментна скорост". Как да я дефинираме? Ние знаем, че средната скорост се пресмята като се раздели целия изминат път на цялото изразходвано време, но ако приложим това правило за моментната скорост ще трябва да делим 0 на 0.



Нека започнем от *средна скорост*. Ако ние сме изминали 100 км за 2 часа, то средната скорост ще е

$$\frac{\text{изминатия път}}{\text{изразходваното време}} = 50\text{км/час}.$$

Нека да означим с t времето (в часове), което сме изразходвали за пътуване и с $s(t)$ изминатото за това време разстояние.

Нека да означим с Δt кратък интервал от време. Така, ако до момента t сме изминали разстояние $s(t)$, а до един следващ момент $t+\Delta t$ сме изминали разстояние $s(t+\Delta t)$, то за краткия интервал от време Δt ние сме изминали разстояние $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. Тогава можем да определим средната скорост за този кратък интервал от време

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \ \text{ км/час.}$$

Ако скъсяваме този интервал Δt, то тази средна скорост ще се приближава към моментната скорост в моментаt.

Така ние дефинираме скоростта в момента t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}. \tag{1}$$

8.3 Скорост на изменение

Двата примера които разгледахме имат много общи свойства.

Ако се абстрахираме от геометричните или механичните термини ние можем да формулираме двете задачи така. Имаме функция $y=f(x)$ и искаме да намерим колко ще се измени стойността на функцията, ако изменим стойността на аргумента. Така ако предположим, че сме изменили аргумента с Δx, т.е. от x е станал $x+\Delta x$, тогава y ще се измени от $f(x)$ до $f(x+\Delta x)$. Изменението на y е

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

и средната скорост на изменение е

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

За да дефинираме *скоростта на изменение на функцията f в т. x* ще оставим Δx да клони към 0 Ако при това съществува границата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f')(x)$$

тя ще ни даде моментната скорост на изменение на f в т. x. тази граница се нарича *производна на функцията f в точката x* и ще я означаваме с $f'(x)$.Така

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

8.4 Още един пример

Нека една химична реакция в която участват две вещества A и B, за да образуват ново вещество AB_2 съгласно реакцията

$$\mathrm{A} + 2\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{AB_2}.$$

Ако реакцията протича в затворен реактор, то количеството от веществата A и B ще намалява, докато веществото AB_2 ще се увеличава. Нека в момента t от началото на реакцията количеството от веществото A измерено в молове е $[A](t)$. Очевидно $[A](t)$е функция на времето. За да определим колко бързо намалява $[A]$ в момента t, пресмятаме

$$[A]'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\mathrm{A}](t+\Delta t) - [\mathrm{A}](t)}{\Delta t}.$$

Тази величина ни дава бързината, с която се намалява количеството на веществото $[A]$ в момента t. Често в книгите се среща означението

$$\frac{d[\mathrm{A}]}{dt}$$

вместо $[A]'(t)$ и изобщо $\frac{df(x)}{dx}$ вместо $f'(x)$ за производната на функцията f в точка x.

8.5 Диференциал на функция

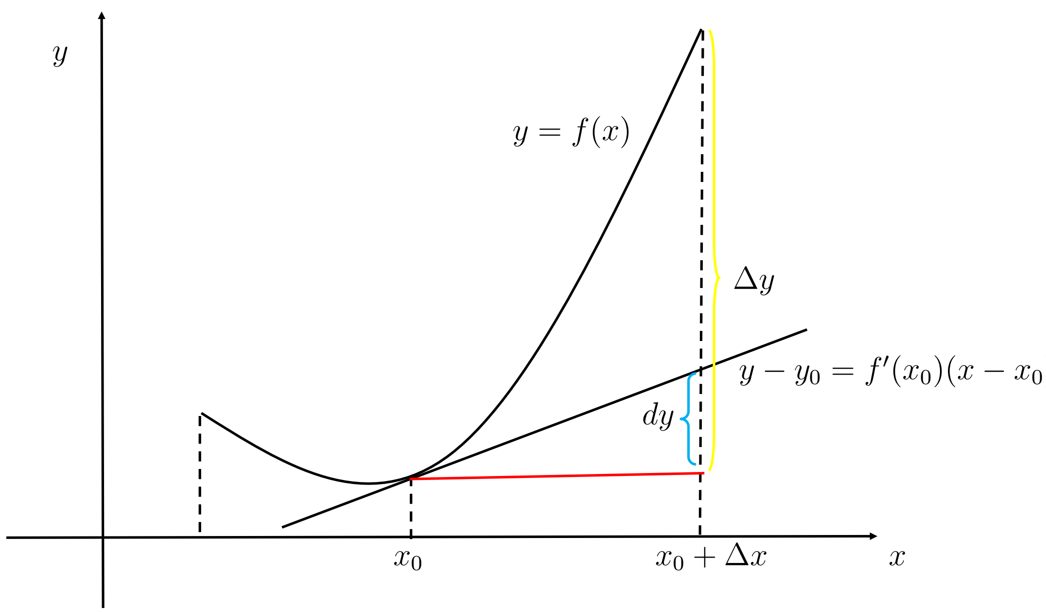


Рис. 2: Диференциал и нарастване на функция.

Ако изменим стойността на аргумента от x_0 до $x_0 + \Delta x$, то стойността на функцията ще се измени с $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. В същото време, ако разгледаме допирателната в точката (x_0, y_0), то върху нея стойността на y ще се измени с $dy = f'(x_0)\Delta x$. Както се вижда от графиката $dy \neq \Delta y$, но ако Δx е малко то $dy \approx \Delta y$. Ако функцията е $y = f(x) = x$ то за нея $dy = \Delta y$. Така определяме *диференциала на функцията* f *в точката* x_0

$$dy = f'(x_0)dx$$

.

Пример 2 *Нека $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = dx = 0,1$. Тогава истинското изменение на функцията е $\Delta y = (1 + 0,1)^2 - 1^2 = 2.0,1 + 0,01 = 0,21$.*

Да пресметнем $f'(x) = 2x$ и $f'(1) = 2.1 = 2$. Сега $dy = f'(1).0,1 = 0,2$.

Вижда се че разликата между действителното изменение на функцията и диференциала е малко, когато изменението на аргумента е малко.

8.6 Производни на някои елементарни функции. Таблица на производните

Да повторим дефиницията на производна на функцията f в точка a от дефиниционнто и множество (c, d).

Производна на функцията f в т. a е границата

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{4}$$

f се нарича *диференцируема в т. a* ако тази граница съществува.

Функцията f се нарича *диференцируема в интервала* (c, d) ако е дифернцируема във всяка точка a от интервала (c, d).

Ако това е така то f' е също функция с дефиниционно множество (c, d).

Пример 3 *Да разгледаме функцията $y = 2x + 5$ и да намерим производната и в т. a. Образуваме частното*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2x + 5 - (2a + 5)}{x - a} = \frac{2x + 5 - 2a - 5}{x - a} = \frac{2(x - a)}{x - a} = 2.$$

Сега виждаме, че за всяко $a \in (-\infty, \infty)$,

$$f'(a) = \lim x \to a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} 2 = 2.$$

Да разгледаме функцията $y = x^3$ и да намерим производната и в т. a. Образуваме частното

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3)}{x - a} = \frac{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}{x - a} = x^2 + xa + a^2.$$

Сега виждаме, че за всяко $a \in (-\infty, \infty)$,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a}(x^2 + xa + a^2) = 3a^2.$$

Като използваме дефиницията можем да пресметнем производните на основните елементарни функции. Те са пресметнати и са дадени в следващата таблица.

функция	производна
$f(x) = C$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^a$	$f'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = \ln xC$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Производни на основните елементарни функции.

8.7 Правила за диференциране на сума, произведение и частно. Производна на съставна функция

8.7.1 Производна на сума

Нека $f(x) = u(x) + v(x)$ за всяко x за което u и v са диференцируеми. Тогава

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

8.7.2 Производна на произведение

Нека $f(x) = u(x).v(x)$ за всяко x за което u и v са диференцируеми. Тогава

$$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x).$$

8.7.3 Производна на частно

Нека $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ за всяко x за което u и v са диференцируеми. Тогава

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

8.7.4 Производна на функция умножена с константа

Нека $f(x) = c.u(x)$ за всяко x за което u е диференцируема, а c е константа. Тогава

$$f'(x) = c.u'(x).$$

8.7.5 Производна на степен на функция

Нека $f(x) = (u(x))^a$ за всяко x, за което u е диференцируема, а a е константа. Тогава

$$f'(x) = a(u(x))^{a-1}.u'(x).$$

8.7.6 Производна на съставна функция

Нека $f(x) = u(v(x))$ за всяко x, за което v е диференцируема и u е диференцируема за $y = v(x)$. Тогава

$$f'(x) = u'(y).v'(x) = u'(v(x)).v'(x)$$

Пример 4 1. *Производна на сума:* $f(x) = x^2 + \sin x$,

$$f'(x) = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x,$$

2. *Производна на произведение:* $f(x) = x^2.\sin x$,

$$f'(x) = (x^2)'.\sin x + x^2.(\sin x)' = 2x.\sin x + x^2.\cos x.$$

3. *Производна на частно:* $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$,

$$f'(x) = \frac{(x^2)'\sin x - x^2.(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{2x.\sin x - x^2\cos x}{(\sin x)^2}.$$

4. *Производна на константа по функция:* $f(x) = 5x^2$,

$$f'(x) = 5.(x^2)' = 5.2x = 10x.$$

5. *Производна на съставна степенна функция:* $f(x) = (\sin x)^5$,

$$f'(x) = 5.(\sin x)^4.(\sin x)' = 5\sin^4 x\cos x.$$

8.8 Производни от по-висок ред

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервала (a, b). Тогава $f'(x)$ съществува и е дефинирана за всяко $x \in (a, b)$. Следователно и $f'(x)$ е също функция, дефинирана в интервала (a, b).

Ако $f'(x)$е диференцируема в (a, b), то нейната производна означаваме с $f''(x)$ и наричаме втора производна на $f(x)$. Ако $f''(x)$ има производна в точките от (a, b), тя се нарича трета производна на $f(x)$ и т.н.

Изобщо производната на n-тата производна на f се нарича $n+1$-ва производна на f.

Означенията, които най-често се ползват са следните:

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(1)}(x) = f'(x), \quad f^{(2)}(x) = f''(x) = (f'(x))',$$

$$f^{(3)}(x) = (f''(x))', \quad \ldots, f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))', \ldots.$$

Използват се също и

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x), \frac{d^3f(x)}{dx^3} = f'''(x), \frac{d^nf(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

8.9 Задачи

1. Намерете производните на следните функции:

$f(x) = 3x^7 + 5x^3 - 11$, $f(x) = x^2 + 5x^3 + 2\sin x$, $f(x) = -x^4 + 2x^5 + x^{-2}$, $f(x) = -3x^2 - x^3 - 11$, $f(x) = 3x^7 + 5\sqrt{x} - 11$, $f(x) = \frac{2}{x} + 5\sqrt[3]{x} + 3$, $f(x) = 7 - \frac{5}{x^3} + 5x^{-7}$.

2. Намерете производните на следните функции: $f(x) = (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1)$, $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$, $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$, $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)(2x + \sqrt{x})$.

3. Намерете производните на следните функции: $f(x) = x^3 \sin x$, $f(x) = (x^2 + 1)\ln x$, $f(x) = e^x \cos x$, $f(x) = \sin x(\cos x + x)$.

4. Намерете производните на следните функции: $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 4}$, $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 3}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 3}$.

5. Намерете производните на следните функции: $f(x) = (x^2 + 2x + 4)^5$, $f(x) = (\sin x + 3e^x)^2$, $f(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3$.