МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН
ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

КАТЕДРА "ФИЗИКА, БИОФИЗИКА, КЛИНИЧНИ И ПРЕДКЛИНИЧНИ НАУКИ"

ЛЕКЦИЯ № 9

ЗА ДИСТАНЦИОННА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА "ВИСША МАТЕМАТИКА"

ЗА СТУДЕНТИ ОТ СПЕЦИАЛНОСТ "ФАРМАЦИЯ"

ТЕМА: Основни теореми на диференциалното смятане. Приложения.

РАЗРАБОТИЛ: проф. Косто Митов

гр. Плевен 2020 год.

9 Основни теореми на диференциалното смятане. Приложения

9.1 Теореми за средните стойности на Рол и Лагранж

Теорема 1 (Теорема на Рол) *Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцируема поне в интервала (a, b). Ако при това $f(b) = f(a)$, то тогава съществува число c, между a и b, такова че $f'(c) = 0$.*

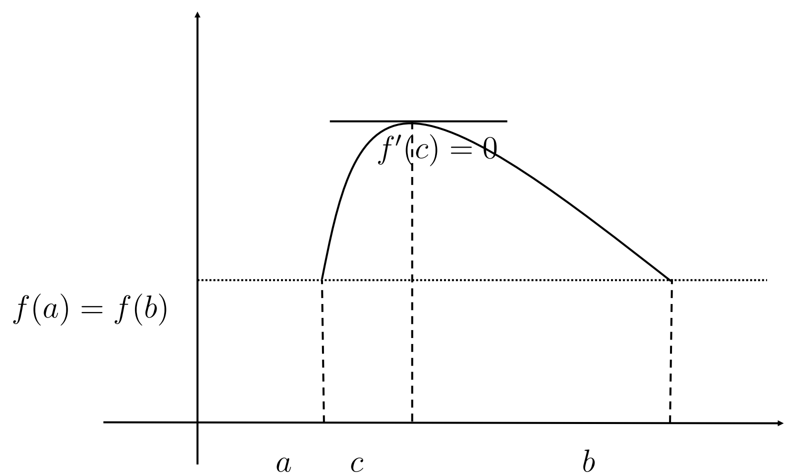

Рис. 1: Теорема на Рол

Теоремата на Рол твърди, че ако функцията е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, има производна поне в отворения интервал (a, b) и в двата края на интервала има равни стойности $f(a) = f(b)$, то има поне една вътрешна за интервала точка c, в която допирателната към графиката е хоризонтална (успоредна на абсцисната ос), т.е. ъгловият коефициент на допирателната в тази точка е равен на 0, ($f'(c) = 0$).

Теорема 2 (Теорема за средните стойности) *Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцируема поне в интервала (a, b). Тогава съществува число c, между a и b, такова че $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Теоремата на Лагранж твърди, че ако функцията е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и има производна поне в отворения интервал (a, b), то има поне една вътрешна за интервала точка c, в която допирателната към графиката е успоредна на секущата през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Ъгловият коефициент на секущата е $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и е равен на ъгловия коефициент на допирателната в точката c, който е равен на $f'(c)$.

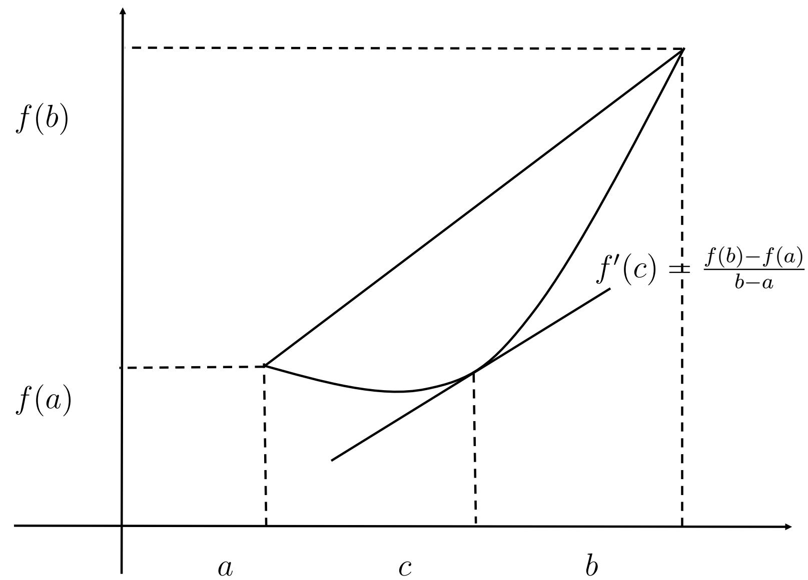

Рис. 2: Теорема на Лагранж

Тези теореми са основни в диференциалното смятане и на тях се основават следващите приложения на производните.

9.2 Теореми на Лопитал за намиране на граница на функция. Неопределени форми

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на точката c. Нека $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$. Тогава границата $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ е неопределена. Ние разгледахме един метод за разкриване на такива неопределености чрез преобразуване на числителя и знаменателя и съкращаване на множители.

Тук ще разгледаме друго правило, което се основава на съществуването на производните $f'(x)$ и $g'(x)$.

Правило на Лопитал за разкриване на неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на точката c и имат производни в тази околност. Нека границата $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ е неопределена. Тогава, ако съществува границата $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то съществува и границата $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ и при това

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Пример 1 *Да намерим границата* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. *Най-напред заместваме* x *с 0 и получаваме*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 0}{1} = e^0 = 1.$$

С това границата е намерена.

Правило на Лопитал за разкриване на неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на точката c и имат производни в тази околност. Нека границата $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ е неопределена. Тогава, ако съществува границата $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то съществува и границата $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ и при това

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на точката c и имат производни в тази околност. Нека границата $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ е неопределена. Тогава, ако съществува границата $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то съществува и границата $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ и при това

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Пример 2 *Да намерим границата* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+3}{3x^2-4}$. *Тъй като* $x \to \infty$, *то числителя и знаменателя клонят също към безкрайност. Следователно заместваме* x *с 0 и получаваме*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 3}{3x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Прилагаме веднаж правилото на Лопитал

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 3}{3x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 + x + 3)'}{(3x^2 - 4)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x + 1)}{6x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

което също е неопределеност. Прилагаме повторно правилото на Лопитал

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x + 1)}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x + 1)'}{(6x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{6} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}} = \frac{1}{3}.$$

С това границата е намерена.

9.3 Растене и намаляване на функция. Екстремуми

9.3.1 Растене и намаляване на функция.

Дефиниция 1 *Функцията* f *е растяща в интервала* $[a, b]$ *от дефиниционното и множество, ако за всеки две числа* $x_1, x_2 \in [a, b]$, *от* $x_1 < x_2$ *да следва* $f(x_1) \leq f(x_2)$. *Ако неравенството е строго, ще казваме че функцията е строго растяща.*

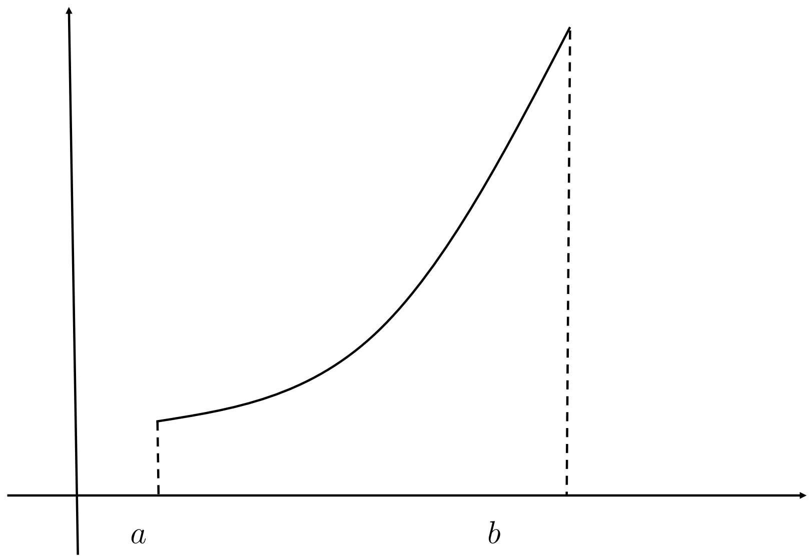

Рис. 3: Растяща функция в интервала $[a, b]$.

Дефиниция 2 *Функцията f е намаляваща в интервала $[a, b]$ от дефиниционното и множество, ако за всеки две числа $x_1, x_2 \in [a, b]$, от $x_1 < x_2$ да следва $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ако неравенството е строго, ще казваме че функцията е строго намаляваща.*

Понякога се използва понятието *монотонност* на функцията в даден интервал, за да се каже, че е или растяща или намаляваща в този интервал.

Теорема 3 *Нека функцията f е дефинирана в интервала $[a, b]$ и е диференцируема в този интервал.*

1) Ако $f'(x) > 0$ за всички $x \in (a, b)$ то f е растяща в $[a, b]$.

2) Ако $f'(x) < 0$ за всички $x \in (a, b)$ то f е растяща в $[a, b]$.

9.4 Екстремуми

Дефиниция 3 *Функцията f има локален максимум в точка x_0 от дефиниционното си множество, ако съществува $\delta > 0$, така, че интервалът $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се съдържа в дефиниционното множество и за всяко число $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да е в сила неравенството $f(x) \leq f(x_0)$.*

Дефиниция 4 *Функцията f има локален минимум в точка x_0 от дефиниционното си множество, ако съществува $\delta > 0$, така, че интервалът $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се съдържа в дефиниционното множество, и за всяко число $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да е в сила неравенството $f(x) \geq f(x_0)$.*

Локалните минимуми и максимуми се наричат общо *локални екстеремуми.*

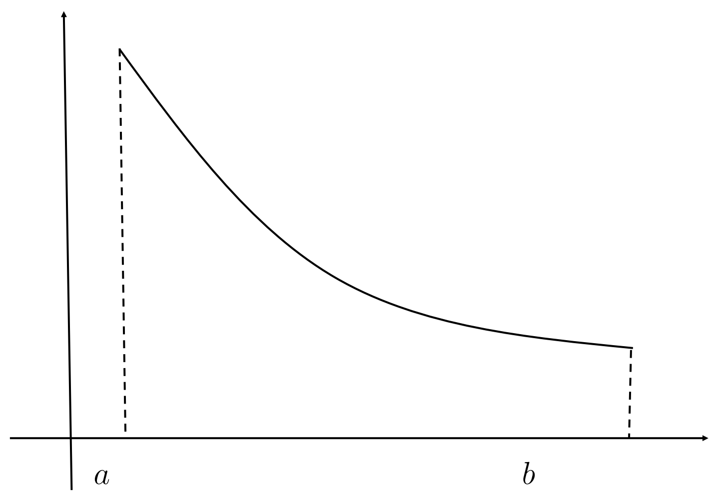

Рис. 4: Намаляваща функция в интервала $[a, b]$.

Теорема 4 *(Теорема на Ферма) Нека функцията f има локален екстремум в точката x_0 от дефиниционното си множество. Ако съществува производната на f в точката x_0, то непременно $f'(x_0) = 0$.*

Теоремата на Ферма ни дава едно необходимо условие за определяне на точките от дефиниционното множество на функцията, в които тя би могла да има локални екстремуми. Това са точките в които $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не съществува.

9.5 Изследване на функция на една променлива

При изследването на една функция ще се ограничим до следните основни задачи:

1. Определяне на дефиниционното множество на функцията.

2. Определяне на границите на функцията в крайщата на дефиниционното множество.

3. Пресмятане на първата производна.

3.1. Определяне на точките, в които $f'(x) = 0$ или не съществува.

3.2. Определяне на интервалите, в които производната има постоянен знак.

3.3. Определяне на интервалите на растене и намаляване в зависимост от знака на първата производна.

3.4. Определяне на точките, в които функцията има локални екстремуми.

3.5. Пресмятане на стойностите на функцията в точките на локален екстремум.

4. Скициране на графиката на функцията.

Този алгоритъм ще илюстрираме с няколко примера.

Пример 3 (Квадратна функция) *Дадена е функцията $f(x) = x^2 - 3x + 2$.*

1. Поради това, че в израза $x^2 - 3x + 2$ има само събиране и умножение, то функцията е дефинирана за всички реални стойности на $x \in (-\infty, \infty)$.

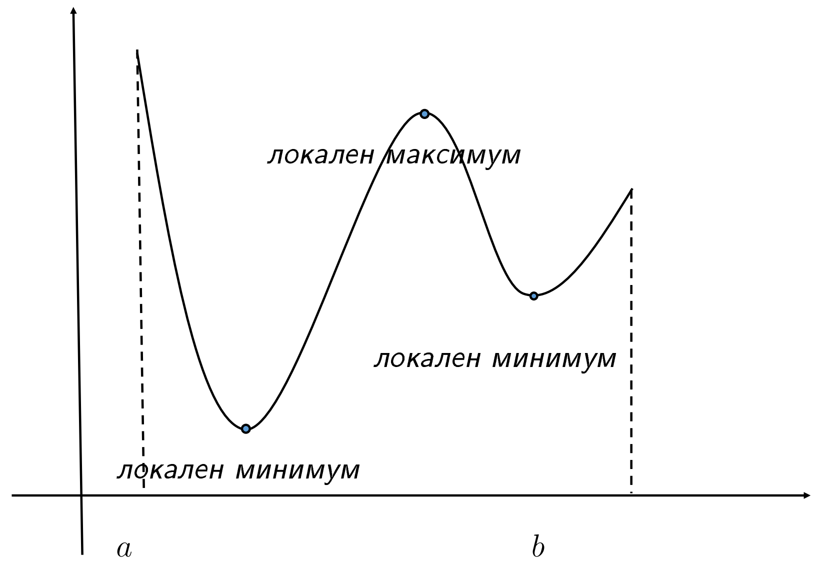

Рис. 5: Локални екстремуми.

2.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+2)=\lim_{x\to-\infty}x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})=\infty\times 1=\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-3x+2)=\lim_{x\to\infty}x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})=\infty\times 1=\infty.$$

3. $f'(x)=2x-3$.

3.1. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=3/2$.

3.2. $f'(x)<0$ *при* $x\in(-\infty,3/2)$ *и* $f'(x)>0$ *при* $x\in(3/2,\infty)$.

3.3. Функцията намалява в интервала $(-\infty,3/2)$ *и расте в интервала* $(3/2,\infty)$.

3.4. В точката $x=3/2$ *функцията има локален минимум.*

3.5. Пресмятаме $f(3/2)=(3/2)^2-3.(3/2)+2=9/4-9/2+2=2-9/4=-1/4$.

4. Ние от преди знаем, че графиката е парабола с връх $V(3/2;-1/4)$ *и с отвора нагоре. Дадена е на фигура 6.*

Пример 4 (Кубична функция) *Дадена е функцията* $f(x)=x^3-9x^2-21x+1$.

1. Поради това, че в израза $x^3-9x^2-21x+1$ *има само събиране и умножение, то функцията е дефинирана за всички реални стойности на* $x\in(-\infty,\infty)$.

2.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-9x^2-21x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^3(1-\frac{9}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{1}{x^3})=-\infty\times 1=-\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-9x^2-21x+1)=\lim_{x\to\infty}x^3(1-\frac{9}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{1}{x^3})=\infty\times 1=\infty.$$

3. $f'(x)=3x^2-18x+21$.

3.1. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+7=0 \Leftrightarrow x_1=-1, x_2=7$.

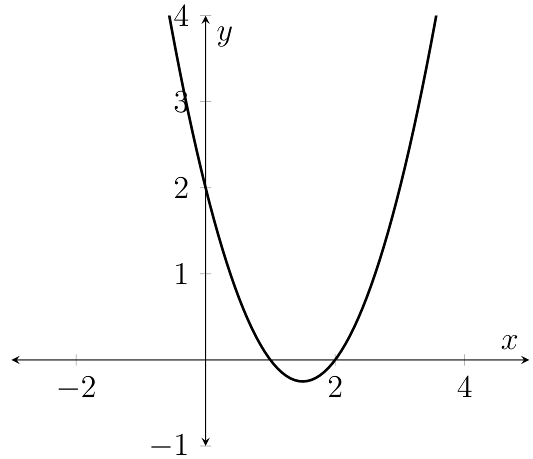

Рис. 6: Графика на функцията $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

3.2. $f'(x) > 0$ *при* $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$ *при* $x \in (-1, 7)$ *и* $f'(x) > 0$ *при* $x \in (7, \infty)$.

3.3. Функцията расте в интервала $(-\infty, -1)$, *намалява в интервала* $(-1, 7)$ *и пак расте в интервала* $(7, \infty)$.

3.4. В точката $x = -1$ *функцията има локален максимум, а в точката* $x_2 = 7$ *има локален минимум.*

3.5. Пресмятаме $f(-1) = 12$ *и* $f(7) = -244$.

4. Приблизителна графика е дадена на фигура 7.

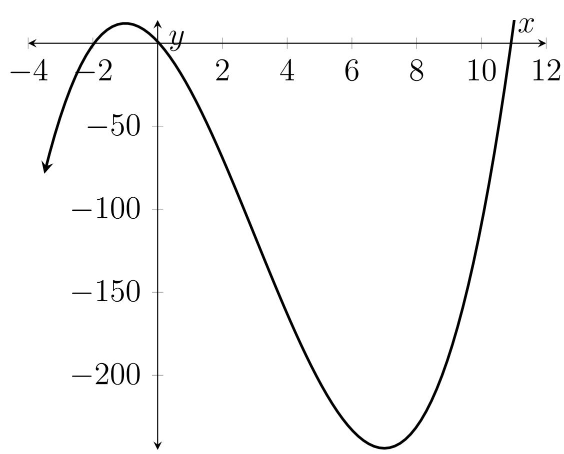

Рис. 7: Графика на функцията $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x + 1$.

9.6 Най-малка и най-голяма стойност на функция в краен затворен интервал

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в крайния затворен интервал $[a, b]$. Искаме да намерим най-малката и най-голямата стойност на тази функция в дадения интервал (ако те съществуват). Знаем, че възможни точки на екстремум са ония, в които първата производна става равна на нула или за които не е дефинирана. За най-малка и най-голяма стойност могат да претендират и стойностите на функцията $f(a)$ и $f(b)$ в крайщата на интервала. Така, за решаване на тази задача ще прилагаме следния алгоритъм.

1. Намираме $f'(x)$.

2. Намираме точките, в които $f'(x)$ не е дефинирана.

3. Намираме корените на уравнението $f'(x) = 0$.

4. От всички стойности на x, намерени в т.2 и т.3, избираме само ония, които са в интервала (a, b). Нека да ги означим с $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.

5. Пресмятаме стойностите на функцията: $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k), f(b)$.

6. От пресметнатите $k+2$ стойности на f избираме най-малката и най-голямата.

Пример 5 *Да намерим най-малката стойност (НМС) и най-голямата стойност (НГС) на функцията* $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 4$ *в интервала* $[-3, 4]$.

1. $f'(x) = 8x^3 - 8x$.

2. $f'(x)$ *е дефинирана за всяко* x.

3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 8x - 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$. *Така корените са* $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

4. Всичките корени на производната са в дадения интервал.

5. Пресмятаме $f(-3) = 2(-3)^4 - 4(-3)^2 + 4 = 162 - 36 + 4 = 130$, $f(-1) = 2 - 4 + 4 = 2$, $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f(2) = 2.2^4 - 4.2^2 + 4 = 32 - 16 + 4 = 20$.

6. Най-малката стойност е $f(-1) = f(1) = 2$, *Най-голямата стойност е* $f(-3) = 130$.

9.7 Задачи

1. Намерете интервалите на монотонност и екстремумите на функцията: $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 24$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$.

2. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията в дадения краен интервал:

а) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1, \quad x \in [-2, 6]$;

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3, \quad x \in [1, 4]$;

в) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 7, \quad x \in [-2, 3]$.