МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 10.

Тема: Неопределен интеграл.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част (Лекция 10.)*
   - Определение.
   - Таблица на основните интеграли.
   - Правила за интегриране на сума на няколко функции и на функция умножена с константа.
   - Внасяне на събираемо и множител под знака на диференциала.
   - Внасяне на функция под знака на диференциала.
2. *Практическа част*
   - Задачи:
     - Подробно решени примери по дадените в теоретичната част теми:
     Интегриране на степенни функци;
     Интегриране на линейна комбинация от функции;
     Добавяне на константа под знака на диференциала;
     Внасяне на множител под диференциала;
     Комбиниране на последните две правила.
     - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Примитивна и неопределен интеграл-от Лекция 10

Ако $F'(x) = f(x)$ за всяко x от даден интервал I, тогава функцията F се нарича примитивна функция на f в интервала I.
Поради това, че производната на константа е равна на 0, то ако $F(x)$ е една примитивна на $f(x)$, то и всяка функция $F(x) + C$ където C е константа, също ще е примитивна на $f(x)$.
Множеството от всички примитивни на дадена функция $f(x)$ се нарича неопределен интеграл на тази функция и се означава с

$$\int f(x)dx.$$

Непосредствено от дефиницията следва, че :

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

или също

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

Таблица на основните интеграли

No.	$\int f(x)dx$	$F(x)+C$
1	$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
2	$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$
3	$\int e^x dx$	$e^x + C$
4	$\int a^x dx, \ a > 0$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
5	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
6	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$

Таблица на основните интеграли

No.	$\int f(x)dx$	$F(x) + C$
7	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
8	$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\mathrm{cotg} x + C$
9	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$	$\operatorname{arctg} x + C$
10	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$	$\arcsin x + C$
11	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx$	$\ln \lvert x + \sqrt{x^2 + a} \rvert + C$

Степенни функции

1. пример. Да пресметнем следните интеграли:
$\int x^2 dx$, $\int x^5 dx$, $\int x^{-6} dx$.
Решение: Всички примери използват формулата за степенна функция (формула № 1)
$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C,$$
$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C,$$
$$\int x^{-6} dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C = \frac{x^{-5}}{-5} + C = -\frac{x^{-5}}{5} + C,$$
$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{x^{-2}}{2} + C.$$
В последния пример степента от знаменателя е записана в числителя като знакът на степенния показател е обърнат (станал е -).

Степенни функции

2. пример. Да пресметнем следните интеграли:

$$\int x^{3/4}dx, \qquad \int \sqrt[3]{x^2}dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Решение: В последните два примера е необходимо коренът да се запише като степен с дробен показател ($\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$).

$$\int x^{3/4}dx = \frac{x^{3/4+1}}{3/4+1} + C = \frac{x^{7/4}}{7/4} + C = \frac{4x^{7/4}}{7} + C,$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{2/3}dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} = \frac{3x^{5/3}}{5} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{1/2}} = \int x^{-1/2}dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C =$$
$$2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

Използване на други формули

3. пример. Да пресметнем следните интеграли:

$$\int \frac{dx}{x}, \qquad \int \sin x dx, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x}, \qquad \int 2^x dx$$

Решение:

$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ - формула 2;

$\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$ - формула 5;

$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ - формула 7;

$\displaystyle\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ - формула 4 при $a = 2$.

Интегриране на линейна комбинация от функции

В сила са следните правила:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \qquad \int C.f(x)dx = C.\int f(x)dx$$

.

4. пример. Да пресметнем следните интеграли:
$$\int (x^3 + 3\cos x - \frac{1}{2}e^x)dx, \qquad \int (2\sqrt[3]{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{3}{\sin^2 x})dx.$$
Решение:

$$\int (x^3 + 3\cos x - \frac{1}{2}e^x)dx = \int x^3 dx + \int 3\cos x dx - \frac{1}{2}e^x dx$$

$$= \quad \frac{x^4}{4} + 3\int \cos x dx - \frac{1}{2}\int e^x dx = \frac{x^4}{4} + 3\sin x - \frac{1}{2}e^x + C$$

Интегриране на линейна комбинация от функции

$$\int (2\sqrt[3]{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{3}{\sin^2 x})dx = \int 2x^{5/3}dx - \int 4.\frac{1}{x}dx - \int 3.\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$= 2\int x^{5/3}dx - 4\int \frac{1}{x}dx - 3\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$= 2\frac{x^5/3+1}{5/3+1} - 4\ln x - 3(-\mathrm{cotg}x) + C$$

$$= 2.\frac{x^{8/3}}{8/3} - 4\ln x + 3\mathrm{cotg}x + C$$

$$= \cancel{2}.\frac{3}{\cancel{8}}x^{8/3} - 4\ln x + 3\mathrm{cotg}x + C = \frac{3}{4}x^{8/3} - 4\ln x + 3\mathrm{cotg}x + C.$$

Добавяне на константа под диференциала

В сила е следното правило:

$$\int f(x+a)dx = \int f(x+a)d(x+a) = \int f(y)dy,$$

като сме означили $x + a = y$.
Като пресметнем последния интеграл

$$\int f(y)dy = F(y) + C$$

заменяме обратно y с $x + a$ и получаваме

$$\int f(x+a)dx = F(x+a) + C.$$

5. пример. Да пресметнем следните интеграли:

$$\int (x+2)^{25}dx, \quad \int \sqrt{x+4}dx, \quad \int \cos(x+3)dx, \quad \int \frac{1}{x-5}dx.$$

Добавяне на константа под диференциала

$$\int (x+2)^{25}dx = \int (x+2)^{25}d(x+2) = \int y^{25}dy$$

(като е означено $x+2$ с y)

$$= \int y^{25}dy = \frac{y^{26}}{26} + C = \frac{(x+2)^{26}}{26} + C.$$

(Приложили сме формула 1 и после сме заменили y с $x+2$.)

$$\int \sqrt{x+4}dx = \int \sqrt{x+4}d(x+4) = \int \sqrt{y}dy = \int y^{1/2}dy = \frac{y^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(x+4)^{3/2} + C.$$

$$\int \cos(x+3)dx = \int \cos(x+3)d(x+3) = \sin(x+3) + C.$$

$$\int \frac{1}{x-5}dx = \int \frac{1}{x-5}d(x-5) = \int \frac{1}{y}dy = \ln y + C = \ln(x-5) + C.$$

Внасяне на множител под диференциала

В сила е следното правило:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{a}\int f(ax)d(ax) = \frac{1}{a}\int f(y)dy,$$

като сме означили $ax = y$.

Като пресметнем последния интеграл

$$\frac{1}{a}\int f(y)dy = \frac{1}{a}.F(y) + C$$

заменяме обратно y с $x + a$ и получаваме

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

6. пример. Да пресметнем следните интеграли:

$$\int \sin 3x dx, \quad \int e^{-4x}dx, \quad \int \cos(\frac{1}{2}x)dx, \quad \int 4^{-x}dx.$$

Внасяне на множител под диференциала

$$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x) d(3x)$$

(означаваме $3x$ с y и пресмятаме по таблична формула 5)

$= \frac{1}{3}\int \sin y dy = \frac{1}{3}.(-\cos y) + C$

(заменяме в решението y с $3x$ и получаваме)

$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

$$\int e^{-4x} dx = \frac{1}{-4}\int e^{-4x} d(-4x) = -\frac{1}{4}\int e^{y} dy = -\frac{1}{4}e^{y} + C =$$

$$-\frac{1}{4}e^{-4x} + C,$$

$$\int \cos(\frac{1}{2}x) dx = \frac{1}{1/2}\int \cos(\frac{1}{2}x) d(\frac{1}{2}x) = 2\int \cos y dy = 2\sin y + C =$$

$$2\sin(\frac{1}{2}x) + C,$$

$$\int 4^{-x} dx = \frac{1}{-1}\int 4^{-x} d(-x) = -\int 4^{y} dy = -\frac{4^{y}}{\ln 4} + C = -\frac{4^{-x}}{\ln 4} + C.$$

Общи задачи

6. пример. Да решим следните интеграли: $\int \sqrt[3]{5x+4}dx$, $\int 2\cos(5x-2)dx$, $\int \frac{3}{4x+1}dx$, $\int (3\cos 4x - \frac{5}{\cos^2 7x})dx$.

Решение: Ще използваме и двете правила. За първия интеграл: 1) ще внесем множител 5 под диференциала; 2) ще добавим събираемо 4, ето така:

$$\int \sqrt[3]{5x+4}dx = \frac{1}{5}\int \sqrt[3]{5x+4}d(5x) = \frac{1}{5}\int \sqrt[3]{5x+4}d(5x+4) = \frac{1}{5}\int \sqrt[3]{y}dy$$

(означили сме $5x+4$ с y)

$$= \frac{1}{5}\int y^{1/3}dy = \frac{1}{5}\frac{y^{4/3}}{4/3} + C = \frac{1}{5}.\frac{3}{4}.y^{4/3} + C = \frac{3}{20}(5x+4)^{4/3} + C.$$

Пресметнали сме интеграла по формула 1 от таблицата и накрая сме заменили y с $5x+4$.)

Общи задачи

$$\int 2\cos(5x-2)dx = 2.\frac{1}{5}\int \cos(5x-2)d(5x) = \frac{2}{5}\int \cos(\underbrace{5x-2}_{y})d(\underbrace{5x-2}_{y})$$
$$= \frac{2}{5}\int \cos y dy = \frac{2}{5}\sin y + C = \frac{2}{5}\sin(5x-2) + C.$$

$$\int \frac{3}{4x+1}dx = 3\int \frac{1}{4x+1}dx = 3.\frac{1}{4}\int \frac{1}{\underbrace{4x+1}_{y}}d(\underbrace{4x+1}_{y}) = \frac{3}{4}\int \frac{1}{y}dy =$$
$$\frac{3}{4}\ln y + C = \frac{3}{4}\ln(4x+1) + C,$$

Общи задачи

$$\int (3\cos 4x - \frac{5}{\cos^2 7x})dx = 3\int \cos 4xd - 5\int \frac{1}{\cos^2 7x}dx$$
$$= 3.\frac{1}{4}\int \cos(4x)d(4x) - 5.\frac{1}{7}\int \frac{1}{\cos^2 7x}d(7x) = \frac{3}{4}\sin(4x) - \frac{5}{7}\operatorname{tg}(7x) + C.$$

Задачи за самостоятелно решаване:

$$\int (4x^3 + 3\sin x - 3^x)dx, \int (2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{10}{x^4})dx;$$

$$\int (3x-4)^{32}dx, \quad \int e^{-3x+1}dx, \quad \int 10^{5x-3}dx, \quad \int \frac{5dx}{3x-8}, \quad \int \sin(\frac{x}{3})dx.$$