МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 11.

Тема: Определен интеграл.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

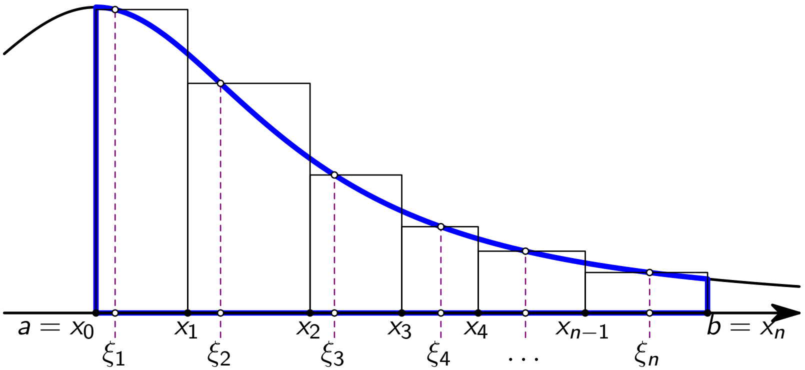
гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част (Лекция 11.)*
   - Лице на равнинна фигура. Дефиниция на определен интеграл.
   - Теорма на Нютон-Лайбниц за връзка между определен и неопределен интеграл.
   - Приложения: Лице на криволинеен трапец, дължина на дъга от крива, обем на ротационно тяло.
   - Смяна на променливите при определен интеграл.
2. *Практическа част*
   - Задачи:
     - Подробно решени примери по някои от дадените в теоретичната част теми:
     Пресмятане на интеграли;
     Пресмятане на лица на равнини фигури.
     - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Лице на криволинеен трапец

Ако редицата
$S_n = (x_1 - x_0).f(\xi_1) + (x_2 - x_1).f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n), \quad n = 1, 2, \ldots$
има граница, означаваме я с $\int_a^b f(x)dx$ (определен интеграл от a до b от $f(x)dx$) и я приемаме за лице на криволинейната фигура.



Формула на Нютон-Лайбниц

Ако f е функция, дефинирана в интервала $[a, b]$, за която определеният интеграл $\int_a^b f(x)dx$ съществува, и ако F е една примитивна на f, то в сила е следната формула (Формула на Нютон-Лайбниц):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

С други думи, най-напред пресмятаме неопределения интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ и даваме на C конкретна числена стойност (най-често $C = 0$), т.е. взимаме една примитивна $F(x)$. След това заместваме x с b и получаваме $F(b)$, после заместваме x с a и получаваме $F(a)$. Накрая пресмятаме разликата $F(b) - F(a)$. Това можем да запишем и по следния начин

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Примери

1. пример. Да решим интеграла $\int_{-2}^{4} x^2 dx$.
   По формула 1 от таблицата на неопределените интеграли пресмятаме $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Считаме, че $C = 0$
   Сега по формулата на Нютон-Лайбниц намираме
   $(F(x) = \frac{x^3}{3}, a = -2, b = 4)$
   $$\int_{-2}^{4} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{64}{3} + \frac{8}{3} = \frac{72}{3} = 24.$$

Примери

2. пример. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx.$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

3. пример. $\int_1^e \frac{5}{x} dx.$

$$\int_1^e \frac{5}{x} dx = 5\int_1^e \frac{1}{x} dx = 5\ln x|_1^e = 5.\ln e - 5.\ln 1 = 5.1 - 5.0 = 5 - 0 = 5.$$

4. пример. $\int_0^2 e^x dx.$

$$\int_0^2 e^x dx = e^x|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1.$$

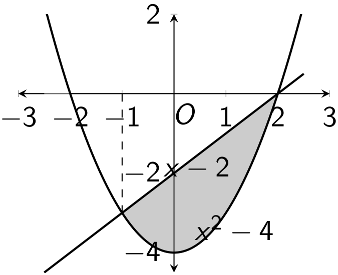
Примери

3. пример. $\int_1^2 (5x^2 - 4x + 3)\,dx.$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (5x^2 - 4x + 3)\,dx &= \int_1^2 5x^2 dx - \int_1^2 4x dx + \int_1^2 3dx \\
&= 5\int_1^2 x^2 dx - 4\int_1^2 x dx + 3\int_1^2 dx \\
&= 5\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 - 4\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 + 3x|_1^2 \\
&= 5\frac{2^3}{3} - 5\frac{1^3}{3} - 4\frac{2^2}{2} + 4\frac{1^2}{2} + 3.3 - 3.1 \\
&= \frac{40}{3} - \frac{5}{3} - \frac{16}{2} - \frac{4}{2} + 6 - 3 = \frac{35}{3} - \frac{12}{2} + 3 = \frac{35}{3} - 6 + 3 \\
&= \frac{35}{3} - 3 = \frac{35-9}{3} = \frac{26}{3}.
\end{aligned}$$

Лице на криволинеен трапец

1. пример. Да се намери лицето на фигурата заградена от графиките на функциите $y = x^2 - 4$ и $y = x - 2$.



Решение: Вижда се, че областта е в интервала $[-1, 2]$ и е заградена отгоре от графиката на функцията $f_1(x) = x - 2$ и отдолу от графиката на $f_2(x) = x^2 - 4$. Тогава лицето на фигурате е $\int_{-1}^{2} (f_1(x) - f_2(x))\, dx = \int_{-1}^{2} (x - 2 - x^2 + 4) dx$.

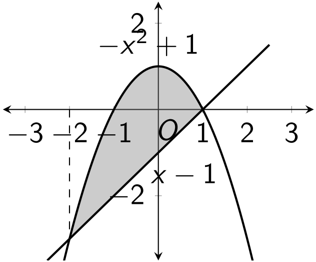
Пресмятаме получения интеграл както следва:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)dx \\
&= \int_{-1}^{2} xdx - \int_{-1}^{2} x^2 dx + 2\int_{-1}^{2} dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} + 2x|_{-1}^{2} \\
&= \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} - \frac{2^3}{3} + \frac{(-1)^3}{3} + 2.2 - 2.(-1) \\
&= 2 - \frac{1}{2} - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 4 + 2 = 4\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Така лицето на фигурата е $4\frac{1}{2}$ кв. ед.

Лице на криволинеен трапец

2. пример. Да се намери лицето на фигурата заградена от графиките на функциите $y = -x^2 + 1$ и $y = x - 1$.



Решение: Вижда се, че областта е в интервала $[-2, 1]$ и е заградена отгоре от графиката на функцията $f_1(x) = -x^2 + 1$ и отдолу от графиката на $f_2(x) = x - 1$. Тогава лицето на фигурате е $\int_{-2}^{1} (f_1(x) - f_2(x))\,dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 + 1 - x + 1)dx$.

Пресмятаме получения интеграл както следва:

$$\int_{-2}^{1} (-x - x^2 + 2)dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{-2}^{1} xdx - \int_{-2}^{1} x^2 dx + 2\int_{-2}^{1} dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} + 2x|_{-2}^{1} \\
&= -\frac{1^2}{2} + \frac{(-2)^2}{2} - \frac{1^3}{3} + \frac{(-2)^3}{3} + 2.1 - 2.(-2) \\
&= -\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 1\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Така лицето на фигурата е $1\frac{1}{2}$ кв. ед.

Смяна на променливите

1. пример. Да решим интеграла $\int_0^{\pi} \cos(3x-\pi)dx$.
Нека положим $y = 3x - \pi$.
Пресмятаме $dy = y'.dx = (3x-2)'.dx = 3.dx$. От тук $dx = \frac{1}{3}.dy$.
Пресмятаме новите граници на интегриране за променливата y от формулата $y = 3x - \pi$:
с $x = 0$ намираме долната граница за y: $3.0 - \pi = -\pi$
с $x = \pi$ намираме горната граница за y: $3.\pi - \pi = 2\pi$.
След тази смяна ще пресметнем новия интеграл

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \cos(y)\frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{2\pi} \cos(y)dy$$

$$= \quad \frac{1}{3}\sin(y)\Big|_{-\pi}^{2\pi} = \frac{1}{3}\sin(2\pi) - \frac{1}{3}\sin(-\pi) = \frac{1}{3}.0 - \frac{1}{3}.0 = 0.$$

Смяна на променливите

2. пример. Да решим интеграла $\int_0^1 \frac{2}{2x+3}dx$.
Нека положим $y = 2x + 3$.
Пресмятаме $dy = y'.dx = (2x + 3)'.dx = 2.dx$. От тук $dx = \frac{1}{2}.dy$.
Пресмятаме новите граници на интегриране за променливата y от формулата $y = 2x + 3$:
с $x = 0$ намираме долната граница за y: $2.0 + 3 = 3$
с $x = 1$ намираме горната граница за y: $2.1 + 3 = 5$.
След тази смяна ще пресметнем новия интеграл

$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{\cancel{2}}{y}\frac{1}{\cancel{2}}dy &= \int_3^5 \frac{1}{y}dy \\ = \quad \ln y\Big|_3^5 &= \ln 5 - \ln 3 = \ln \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Задачи за самостоятелно решаване

1. Решете интегралите:

$$\int_1^4 x^{-2}\,dx \qquad \int_0^1 (1-2x-3x^2)\,dx \qquad \int_1^2 (5x^2-4x+3)\,dx$$

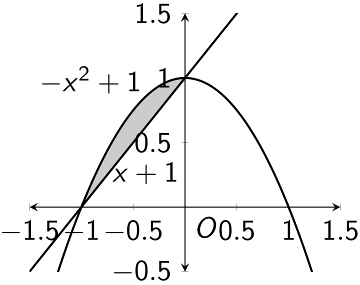
$$\int_{-3}^0 (5y^4-6y^2+14)\,dy \qquad \int_0^1 (y^9-2y^5+3y)\,dy$$

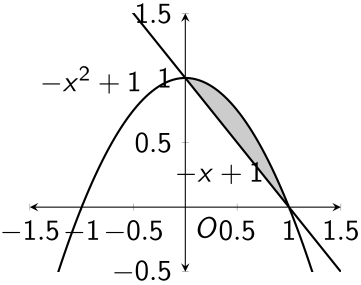
$$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx \qquad \int_0^1 x^{3/7}\,dx \qquad \int_1^3 \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)\,dt$$

$$\int_0^2 (x^3-1)^2\,dx \qquad \int_1^{-1} (x-1)(3x+2)\,dx \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x dx \qquad \int_1^2 e^x\,dx.$$

Задачи за самостоятелно решаване

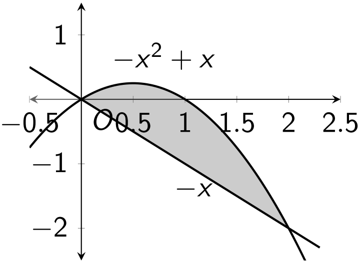
2. Намерете лицата на фигурите:

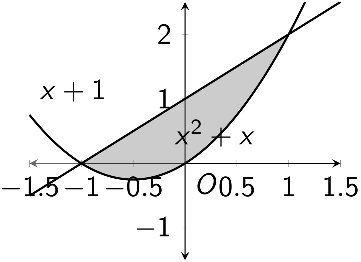




Задачи за самостоятелно решаване

2. Намерете лицата на фигурите:





Задачи за самостоятелно решаване

3. Решете интегралите като направите смяна на променливите:

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx \qquad \int_0^1 e^{-2x+3}dx \qquad \int_0^2 5^{2x+1}dx$$

$$\int_{-1}^1 \sin(x+\pi)dx.$$