МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 12.

Тема: Обикновени диференциални уравнения.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част (Лекция 12.)*
    - Обикновени диференциални уравнения. Определения. Общо и частно решение.
    - Линейни диференциални уравнения от първи ред. Формула за общото решение.
    - Линейни диференциални уравнения от втори ред с постоянни коефициенти.
    - Общо решение на Линейни Хомогенни ДУ от 2-ри ред с постоянни коефициенти.
    - Задача на Коши за ЛХДУ от 2 ред с постоянни коефициенти.
2. *Практическа част*
    - Задачи:
      - Подробно решени примери по някои от дадените в теоретичната част теми:
      - Линейни ДУ от първи ред.
      - Линейни ДУ от 2 ред с постоянни коефициенти.
      - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Общ вид и формула за решаване

Линейно ОДУ от първи ред има следния общ вид:

$$y' + p(x)y = q(x),$$

където $p(x)$ и $q(x)$ са известни функции, а y е търсената функция и y' е нейната производна.
Общото решение на това ДУ се дава с формулата

$$y = e^{-P(x)}\left(C + Q(x)\right),$$

където

$$P(x) = \int p(x)dx, \qquad Q(x) = \int q(x).e^{P(x)}dx.$$

Решени примери

Алгоритъмът за решаване на линейно ОДУ , който ще следваме е:

1. Пресмятаме:

$$P(x) = \int p(x)dx$$

2. Определяме $e^{P(x)}$ и $e^{-P(x)}$ и опростяваме тези изрази, ако може.

3. Пресмятаме:

$$Q(x) = \int q(x).e^{P(x)}dx.$$

4. Записваме решението:

$$y = e^{-P(x)}\left(C + Q(x)\right).$$

Решени примери

1. пример.

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2$$

Решение: Тук $p(x) = \frac{1}{x}$ и $q(x) = x^2$.
1. Пресмятаме $P(x) = \int p(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$.
2. Определяме $e^{P(x)} = e^{\ln x} = x$ и $e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.
3. Пресмятаме

$$Q(x) = \int q(x).e^{P(x)}dx = \int x^2.xdx = \int x^3dx = \frac{x^4}{4}.$$

4. Записваме решението

$$y = e^{-P(x)}\left(C + Q(x)\right) = \frac{1}{x}\left(C + \frac{x^4}{4}\right) = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}.$$

Решени примери

1. пример.

$$y' + 2xy = x.e^{-x^2}$$

Решение: Тук $p(x) = 2x$ и $q(x) = x.e^{-x^2}$.
1. Пресмятаме $P(x) = \int p(x)dx = \int 2xdx = 2.\frac{x^2}{2} = x^2$.
2. Определяме $e^{P(x)} = e^{x^2}$ и $e^{-P(x)} = e^{-x^2}$.
3. Пресмятаме

$$Q(x) = \int q(x).e^{P(x)}dx = \int x.e^{-x^2}.e^{x^2}dx = \int xdx = \frac{x^2}{2}.$$

4. Записваме решението

$$y = e^{-P(x)}\left(C + Q(x)\right) = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right).$$

Общ вид. Хомогенно и нехомогенно ЛДУ с постоянни коефициенти

Линейно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти има следният общ вид:

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

където a, b и c са дадени константи (числа), $f(x)$ е известна функция, а y е неизвестната функция и y' y'' са нейните първа и втора производна.

Когато $f(x) \equiv 0$, т.е.

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

уравнението се нарича хомогенно, в противен случай е нехомогенно.

Алгоритъм за решаване на хомогенно ЛДУ с постоянни коефициенти

1. За уравнението $ay'' + by' + cy = 0$, образуваме следното квадратно уравнение:

$$ar^2 + b^r + c = 0,$$

с коефициенти a, b, c и неизвестно r, което се нарича характеристично уравнение за даденото ЛХДУ.
2. За характеристичното уравнение пресмятаме дискриминантата

$$D = b^2 - 4.a.c.$$

Знаем, че са възможни три случая.

Алгоритъм за решаване на хомогенно ЛДУ с постоянни коефициенти

- Ако $D > 0$ пресмятаме корените $r_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2.a}$, $\quad r_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2.a}$. Тогава общото решение на диференциалното уравнение има вида

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

- Ако $D = 0$ пресмятаме двойния корен $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2.a}$. Тогава общото решение на диференциалното уравнение има вида

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_1 x}.x = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}.$$

- Ако $D < 0$ уравнението няма реални корени. Означаваме

$$\alpha = \frac{-b}{2.a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2.a}.$$

Тогава общото решение на диференциалното уравнение има вида

$$y = \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right) e^{\alpha x}.$$

И в трите случая C_1 и C_2 са произволни константи.

Решени примери

1. пример. Да решим $y'' + 3y' + 2y = 0$.
   Решение:
   1. Записваме характеристичното уравнение $r^2 + 3r + 2 = 0$,
   $a = 1, b = 3, c = 2$.
   2. Пресмятаме $D = 3^2 - 4.1.2 = 9 - 8 = 1 > 0$ (първи случай).
   $r_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2.1} = -2$ и $r_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2.1} = -1$.
   3. Записваме общото решение на ДУ
   $$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$
2. Да решим $y'' - 4y = 0$.
   1. Записваме характеристичното уравнение $r^2 - 4 = 0$.
   2. Сега непосредствено намираме двата различни реални корена
   $r_1 = \sqrt{4} = 2$ и $r_2 = -\sqrt{4} = -2$. (първи случай)
   3. Записваме общото решение на ДУ
   $$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Решени примери

3 пример. Да решим $y'' - 2y' = 0$.

Решение:

1. Записваме характеристичното уравнение $r^2 - 2r = 0$ или $r(r-2) = 0$.
2. Сега непосредствено намираме двата различни реални корена $r_1 = 0$ и $r_2 = 2$. (първи случай)
3. Записваме общото решение на ДУ

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

В последните два примера имаме непълни квадратни уравнения, които се решават без формулата, но и в двата случая имаме два различни реални корена на характеристичното уравнение, т.е. използваме формулата за общото решение на ДУ от първия случай.

Решени примери

4. пример. Да решим $4y'' - 4y' + y = 0$.
Решение:
1. Записваме характеристичното уравнение $4r^2 - 4r + 1 = 0$.
2. Пресмятаме $D = (-4)^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$.
Характеристичното уравнение ще има двоен реален корен
$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2.4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. (втори случай)
3. Записваме общото решение на ДУ

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}.x = (C_1 + C_2 x)e^{x/2}.$$

Решени примери

5. пример. Да решим $y'' + 2y' + 2y = 0$.
Решение:
1. Записваме характеристичното уравнение $r^2 + 2r + 2 = 0$.
2. Пресмятаме $D = 2^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4 < 0$.
Характеристичното уравнение няма реални корени. (трети случай). Означаваме $\alpha = \frac{-2}{2.1} = -1$ и $\beta = \frac{\sqrt{|-4|}}{2.1} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
3. Записваме общото решение на ДУ

$$y = (C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x)e^{-1.x} = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x}.$$

Задача на Коши

6 пример. Сега ще решим следната задача:
Дадено е уравнението $y'' - 4y' + 3y = 0$ и заедно с него следните начални условия $y(0) = 1, y'(0) = 3$.
Ще търсим частно решение, което удовлетворява и ДУ и дадените начални условия.
Решение:
1. Записваме характеристичното уравнение $r^2 - 4r + 3 = 0$.
2. Пресмятаме $D = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4 > 0$. Пресмятаме $r_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ и $r_2 = \frac{4+2}{2} = 3$.
3. Записваме общото решение на ДУ

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

4. Намираме $y' = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.3 = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$.

Решени примери

Сега ще използваме двете начални условия за да определим частното решение, което ги удовлетворява.

5. От първото начално условие $y(0) = 1$ намираме
$y(0) = C_1e^0 + C_2e^{3.0} = 1$ или $C_1 + C_2 = 1$.
6. От второто начално условие $y'(0) = 3$ намираме
$y'(0) = C_1e^0 + 3C_2e^{3.0} = 3$ или $C_1 + 3C_2 = 3$.

Решени примери

7. Решаваме системата $\left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 3C_2 = 3 \end{array} \right.$

Изваждаме първото уравнение от второто и получаваме

$\left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_2 = 2 \end{array} \right.$

От второто уравнение намираме $C_2 = 1$. Заместваме в първото и намираме $C_1 + 1 = 1$, т.е. $C_1 = 0$.

8. В общото решение на ДУ $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ заместваме C_1 с 0 и C_2 с 1 и получаваме решението на дадената начална задача:

$$y = 0.e^x + 1.e^{3x} = e^{3x}.$$

Задачи за самостоятелно решаване

1. Решете следните линейни ДУ от 1-ви ред:
   $y' - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x, \quad y' + \frac{1}{x-2}y = x + 4, \quad y' + 3x^2 y = 3xe^{-x^3},$
2. Решете следните линейни хомогенни ДУ с постоянни коефициенти:
   $y'' - 6y' + 5y = 0, \quad 5y'' + 6y' + y = 0, \quad y'' - 9y = 0,$
   $y'' - 2y' + y = 0,$
   $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y'' - 4y' + 5y = 0, \quad 2y'' - 2y' + y = 0.$
3. Решете следните задачи на Коши
   $y'' - 6y' + 5y = 0$ с начални условия $y(0) = 1, y'(0) = 4.$
   $y'' - 6y' + 9y = 0$ с начални условия $y(0) = 1, y'(0) = 0.$