МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 13.

Тема: Вероятност.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част (Лекция 13.)*
    - Опити с повече от един възможен изход. Пространство от елементарни изходи.
    - Случайни събития. Действия със случайни събития.
    - Вероятност. Класическа дефиниция.
    - Теорема за събиране на вероятности.
    - Условна вероятност и независими събития.
2. *Практическа част*
    - Задачи:
      Подробно решени примери по някои от дадените в теоретичната част теми:
      - Определяне на всички елементарни изходи за даден опит.
      - Определяне на елементарните изходи, съставлаващи дадено случайно събитие.
      - Определяне на сечение, обединение и допълнително събитие.
      - Пресмятане на вероятности на случайни събития.

Определяне на възможните изходи при даден опит

1. пример. Опитът се състои в хвърляне на правилна монета. Кои са възможните изходи?
   Решение: Възможните изходи са два 'L-лице' или 'ези' и 'G-гръб' или 'тура'. Пространството от всички възможни изходи е
   $$\Omega = \{L, G\}.$$
   Всички възможни случайни събития свързани с този опит са:
   $\emptyset$-невъзможното събитие (то никога не се случва);
   $\{L\}$ - пада се 'лице';
   $\{G\}$ - пада се 'гръб';
   $\Omega = \{L, G\}$ - достоверното събитие(то винаги се случва-пада се една от двете страни на монетата).

Определяне на възможните изходи при даден опит

2. пример. Опитът се състои в хвърляне на две различни правилни монети. Например едната от 5ст, а другата от 2ст. Кои са възможните изходи?
Решение: Възможните елементарни изходи са следните: LL, LG, GL, GG като първата буква показва какво се е паднало на монетата от 2 ст. а втората - на монетата от 5 ст.

2 \ 5	L	G
L	LL	LG
G	GL	GG

Ето някои случайни събития свързани с този опит:
$\emptyset$ - невъзможното събитие; $\{$ падат се две лица $\}=\{LL\}$; $\{$ падат се два гърба $\}=\{GG\}$;
$\{$ падат се поне едно лице $\}=\{LL, LG, GL\}$; $\{$ падат се точно един гръб $\}=\{LG, GL\}$.

Определяне на възможните изходи при даден опит

3. пример. Хвърля се правилен зар. Кои са възможните изходи?
Решение: Възможните изходи са
$\Omega = \{$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ $\}$.
Ето няколко събития свързани с този опит:
{падат се четен брой точки} = {⚁, ⚃, ⚅};
{падат се повече от 2 точки} = {⚂, ⚃, ⚄, ⚅};
{падат се 6 точки} = {⚅}.

Определяне на възможните изходи при даден опит

4. пример. Студент решава тест с 5 въпроса, всеки от които има по 3 възможни отговора. Кои са възможните изходи?
Решение: Нека възможните отговори са означени с a, b, c. В таблицата е даден един възможен отговор: $\{abbca\}$.

въпрос №	Възможни		отговори
1	$\cancel{a}$	b	c
2	a	$\cancel{b}$	c
3	a	$\cancel{b}$	c
4	a	b	$\cancel{c}$
5	$\cancel{a}$	b	c

Всички възможни отговори (елементарни изходи) са всевъзможните редици от по 5 букви измежду a, b или c. Броя им е $3.3.3.3.3 = 3^5 = 243$ затова няма да ги изброяваме всичките.

Определяне на възможните изходи при даден опит

5. пример. Хвърлят се два различими зара. Например един син-S и един зелен-Z. Кои са възможните изходи?
Решение: Възможните изходи са всички 36 наредени двойки (s, z), където s е броя на точките на синия зар а z е броя на точките на зеления. Те са дадени в следната таблица:

S \ Z	1	2	3	4	5	6
1	$1, 1$	$1, 2$	$1, 3$	$1, 4$	$1, 5$	$1, 6$
2	$2, 1$	$2, 2$	$2, 3$	$2, 4$	$2, 5$	$2, 6$
3	$3, 1$	$3, 2$	$3, 3$	$3, 4$	$3, 5$	$3, 6$
4	$4, 1$	$4, 2$	$4, 3$	$4, 4$	$4, 5$	$4, 6$
5	$5, 1$	$5, 2$	$5, 3$	$5, 4$	$5, 5$	$5, 6$
6	$6, 1$	$6, 2$	$6, 3$	$6, 4$	$6, 5$	$6, 6$

Определяне на възможните изходи при даден опит

6. пример. При опитът с двата зара да се опишат събитията:
{ броят на точките на двата зара е един и същ };
{ сумата от точките на двата зара е равна на 5};
{ броят на точките на първия зар е четен, а на втория - нечетен};
Решение: Като използваме таблицата определяме елементарните изходи, които съставляват всяко от тези събития:
{ броят на точките на двата зара е един и същ } $=$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
{ сумата от точките на двата зара е равна на 5} $=$
$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$;
{ броят на точките на първия зар е четен, а на втория - нечетен} $=$
$\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$.

Формула за класическата вероятност

Провеждаме опит с повече от един изход и предполагаме, че при еднократно провеждане на опита всички елеметарни изходи са равновъзможни.
Нека множеството Ω от елементарните изходи от един опит е крайно. Да означим с $|\Omega|$ броя на всички възможни елементарни изходи, т.е. на всичките елементи на Ω.
Нека A е случайно събитие, което може да се сбъдне при провеждането на опита, т.е. A е подмножество на Ω. Да означим броя на елементарните изходи, които съставляват A с $|A|$. Тези елементарни изходи наричаме благоприятни за A.
Определяме числото

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{брой на благоприятните изходи}}{\text{брой на всички възможни изходи}},$$

което наричаме вероятност за сбъдване на събитието A.

Свойства на класическата вероятност

Следните свойства на класическа вероятност следват непосредствено от дефиницията.

1. За всяко събитие A, $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$.
2. Ако A и B са две несъвместими събития (които нямат общи елементарни изходи) $A \bigcap B = \emptyset$, то $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$.
3. Ако A и B са две събития и $A \bigcap B \neq \emptyset$, то $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$.
4. За всяко събитие A и неговото допълнително събитие $\overline{A}$ е в сила $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Решени примери

1. пример. Хвърля се правилна монета. Каква е вероятността да се падне L-лице?
Решение: Знаем, че $\Omega = \{L, G\}$, т.е. $|\Omega| = 2$. За събитието $\{L\}$ благоприятният изход е само един. Така $P(\{L\}) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$. (Което ние си знаем и от житейски опит.)
2. Хвърлят се две различими монети. Например една от 2ст и една от 5ст. Каква е вероятността да се падне поне едно L-лице?
Знаем, че $\Omega = \{LL, LG, GL, GG\}$. Следователно $|\Omega| = 4$.
Събитието $A = \{\text{пада се поне едно L-лице}\} = \{LL, LG, GL\}$. Така $|A| = 3$. Тогава $P(A) = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$.

Решени примери

3. пример. Хвърля се правилен зар. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $|\Omega| = 6$. Да пресметнем вероятностите на събитията:
$A = \{$падат се четен брой точки$\}$, $B = \{$падат се поне 2 точки $\}$
$C = \{$падат се нечетен брой или поне 5 точки$\}$.
Решение: Събитието
$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Събитието $B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow |B| = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{||B|}{|\Omega|} = \frac{5}{6}$.
Събитието $C = C_1 \bigcup C_2$, където
$C_1 = \{$падат се нечетен брой точки$\} = \{1, 3, 5\}$ и
$C_2 = \{$падат се поне 5 точки $\} = \{5, 6\}$. Виждаме, че $|C_1| = 3$, $P(C_1) = \frac{3}{6}$, $|C_2| = 2$, $P(C_2) = \frac{2}{6}$, и накрая $C_1 \bigcap C_2 = \{5\}$, следователно $|C_1 \bigcap C_2| = 1$ и $P(C_1 \bigcap C_2) = \frac{1}{6}$. По теоремта за събиране на вероятности $P(C) = P(C_1 \bigcup C_2) =$
$P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \bigcap C_2) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Решени примери

4. пример. Разглеждаме опита с хвърляне на 2 правилни различими зара S-син и Z-зелен. Да се пресметнат вероятностите на следните събития:
$A = \{$броя на точките на дваата зара да е еднакъв $\}$,
$B = \{$сумата от точките на двата зара е равна на 7$\}$,
$C = \{$точките на S зар да са с 2 повече от точките на Z$\}$.
Решение: Знаем, че $|\Omega| = 36$.
За събитието A в таблицата намираме
$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.
Така $|A| = 6$
Следователно $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Решени примери

S \ Z	1	2	3	4	5	6
1	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$	$1,6$
2	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$	$2,5$	$2,6$
3	$3,1$	$3,2$	$3,3$	$3,4$	$3,5$	$3,6$
4	$4,1$	$4,2$	$4,3$	$4,4$	$4,5$	$4,6$
5	$5,1$	$5,2$	$5,3$	$5,4$	$5,5$	$5,6$
6	$6,1$	$6,2$	$6,3$	$6,4$	$6,5$	$6,6$

За събитието B от таблицата намираме
$B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, т.е. $|B| = 6$.
Следователно $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Решени примери

S \ Z	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

За събитието C от таблицата намираме
$C = \{(3,1),(4,2),(5,3),(6,4)\}$, т.е. $|C| = 4$.
Следователно $P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Решени примери

5. пример. В една група от 10 студенти има 4 момичета и 6 момчета. По случаен начин е избран един студент. Каква е вероятността той да е момче?
Решение: Броят на възможните изходи е 10. Броят на благоприятните изходи е 6.
Така $P(\text{Да е избрано момче}) = \frac{6}{10} = 0,6 = 60\%$.
6. пример. В една група от 10 студенти 5 учат английски, 3 учат немски и 2 учат френски. По случаен начин е избран един студент. Каква е вероятността той да не учи английски?
Решение: Броят на възможните изходи е 10. Броят на благоприятните изходи е 3+2=5 (Да изберем студент от тези, които учат немски или френски).
Така $P(\text{Да е избран студент, който не учи английски}) = \frac{5}{10}$.

Задачи за самостоятелно решаване

1. Хвърлят се два различими зара: син-S и зелен-Z. Да се пресметнат вероятностите на следните събития:
   $A =$ {Сумата от точките на двата зара е четно число },
   $B =$
   {Броят на точките на първия зар се дели на броя на точките на втор
   $C =$ {Сумата от точките на двата зара се дели на 3},
   $D =$ {Точките на синия зар са четен брой, а на зеления нечетен},
2. В една група от 10 студенти има 2 отлични, 3 много добри, 4 добри и 1 среден по успех. По случаен начин е избран един студент. Каква е вероятността той да е добър? Каква е вероятността да не е отличник? Каква е вероятността да е избран студент със слаб успех?