МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 14.

Тема: Случайни величини.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част (Лекция 14.)*
   - Определение за случайна величина-дискретни и непрекъснати сл. величини.
   - Закон за разпределение на дискретна сл. величина.
   - Числови характеристики на дискретна случайна величина (математическо очакване, дисперсия, стандартно отклонение, мода, медиана).
   - Непрекъснати сл. величини - плътност и функция на разпределение.
2. *Практическа част*
   - Задачи:

     Подробно решени примери по някои от дадените в теоретичната част теми:

     - Построяване на закон за разпределение на дискретна случайна величина.

     - Пресмятане на числови характеристики на дискретни сл. величини.

     - Пресмятане на вероятности за случайни величини.

Определения

Нека Ω е пространството от елементарните изходи свързани с даден опит.
Числова функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ наричаме случайна величина.
Ако случайната величина приема краен брой или изброимо много стойности тя се нарича дискретна,
ако множеството от стойности е интервал, тя се нарича непрекъсната.

Закон за разпределение на дискретна сл. величина

Първо ще се разгледаме дискретни случайни величини.
Нека множеството от стойности на сл. величина X е крайно и се състои от числата: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.
Да означим с $\{X = x_1\}$ множеството от елементарните изходи от Ω, за които $X(\omega) = x_1$. Това множество е случайно събитие.
Нека неговата вероятност е $P(\{X = x_1\}) = p_1$. (За по-кратко ще пишем $P(X = x_1) = p_1$.)
Да предположим, че сме пресметнали всички вероятности
$P(X = x_2) = p_2, P(X = x_3) = p_3, \ldots, P(X = x_n) = x_n$.
Тогава казваме, че ни е известен закона за разпределение на сл. величина X, който ще записваме в следния вид:

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

Свойства на закона за разпределение

Закона за разпределение на сл. величина X

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

има следните свойства:

1. Стойностите на сл. величина $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ са различни по между си и са подредени във възходящ ред.

2. Числата във втория ред на таблицата $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ са вероятности и следователно $0 \leq p_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$.

3. Поради това, че сл. величина приема тези и само тези стойности, то $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

4. Ако $a < b$ са дадени реални числа

$$
\begin{aligned}
P(a \leq X \leq b) &= \sum_{a \leq x_i \leq b} p_i \\
&= \text{ сумата на вероятностите } p_i \text{ за които } a \leq x_i \leq b.
\end{aligned}
$$

Решени примери

1. пример.Хвърляме еднократно правилна монета. Знаем, че $\Omega = \{L, G\}$. Нека $X(L) = 1$, $X(G) = -1$. Да определим закона за разпределение на сл. величина X.
   Решение: X е случайна величина с две възможни значения. Знаем, че $P(L) = 0,5$ и $P(G) = 0,5$. Така закона за разпределение на X е

X	-1	1
P	$0,5$	$0,5$

2. пример. Хвърляме правилен зар. $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$. Нека $X($⚀$) = 1$, $X($⚁$) = 2$, $X($⚂$) = 3$, $X($⚃$) = 4$, $X($⚄$) = 5$, $X($⚅$) = 6$. Да определим закона за разпределение на X.
   Решение: Законът за разпределение на X е

X	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Решени примери

3. пример.Хвърляме два различими зара. Нека X е сл. величина равна на сумата от падналите се точки. Да се намери закона за разпределение на X.
Решение: От таблицата с елементарните изходи от този опит намираме:

S \ Z	1	2	3	4	5	6
1	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$	$1,6$
2	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$	$2,5$	$2,6$
3	$3,1$	$3,2$	$3,3$	$3,4$	$3,5$	$3,6$
4	$4,1$	$4,2$	$4,3$	$4,4$	$4,5$	$4,6$
5	$5,1$	$5,2$	$5,3$	$5,4$	$5,5$	$5,6$
6	$6,1$	$6,2$	$6,3$	$6,4$	$6,5$	$6,6$

$\{X=2\}=\{(1,1)\}$,
$\{X=3\}=\{(1,2),(2,1)\}$,
$\{X=4\}=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$,
$\{X=5\}=$
$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$,
$\{X=6\}=$
$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$,

Решени примери

$\{X = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$,
$\{X = 8\} = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,
$\{X = 9\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$,
$\{X = 10\} = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$,
$\{X = 11\} = \{(5,6),(6,5)\}$,
$\{X = 12\} = \{(6,6)\}$.

Следователно стойностите на сл. величина X са $2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$. Като преброим съответните благоприятни изходи и знаем, че всички възможни изходи са 36 намираме вероятностите и записваме закона за разпределение.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Определения

Нека X е сл. величина с известен закон за разпоределние:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Числото $E(X) = p_1.x_1 + p_2.x_2 + p_3.x_3 + \dots + p_n.x_n$ се нарича математическо очакване или средна стойност на сл. величина X.
Числото $E(X^2) = p_1.x_1^2 + p_2.x_2^2 + p_3.x_3^2 + \dots + p_n.x_n^2$ се нарича втори момент на сл. величина X.
Числото $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ се нарича дисперсия на сл. величина X.
Числото $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ се нарича средно квадратично (стандартно) отклонение.

Свойства

Ако X е сл. величина с дадения закон за рапределение и a, b са реални числа, тогава $Y = a.X + b$ е нова случайна величина със следния закон за разпределение

Y	$a.x_1 + b$	$a.x_2 + b$	$a.x_3 + b$	$\dots$	$a.x_n + b$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

.

- $E(X)$ е мярка за положението на стойностите на сл. величина X върху числоваа ос.
- Ако знаем $E(X)$, то за $Y = a.X + b$ имаме $E(Y) = a.E(X) + b$.
- $D(X)$ е мярка за разсейването на стойностите на сл. величина X около математическото очакване $E(X)$.
- За всяка сл. величина X, $D(X) \geq 0$.
- Ако знаем $D(X)$, то за $Y = a.X + b$ имаме $D(Y) = a^2.D(X)$.

Примери за пресмятане на числови характеристики

1. пример. Да пресметнем числовите характеристики на сл. величина X с разпределение

X	-1	1
P	$0,5$	$0,5$

Решение: $E(X) = 0,5.(-1) + 0,5.1 = -0,5 + 0,5 = 0,$
$E(X^2) = 0,5.(-1)^2 + 0,5.1^2 = 0,5 + 0,5 = 1,$
$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 - 0^2 = 1 - 0 = 1,$
$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1} = 1.$

Примери за пресмятане на числови характеристики

2. пример. Да пресметнем числовите характеристики на сл. величина X с разпределение

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Решение: $E(X) = \frac{1}{6}.(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$
$E(X^2) = \frac{1}{6}.(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6}$,
$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2$

$$= \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{546-441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12},$$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}}$.

Примери за пресмятане на числови характеристики

1. пример. Дадена е сл. величина X с разпределение:

X	-2	-1	0	1	3
P	$0,2$	$0,1$	$0,3$	p	$0,1$

Да се намери стойността на неизвестния параметър p и да се пресметнат числовите характеристики на сл. величина.
Решение: Знаем, че сумата от вероятностите в закона за разпределение е единица. Така $0,2+0,1+0,3+p+0,1=1$ или $0,7+1$, т.е. $p=0,3$.

Законът за разпределение е

X	-2	-1	0	1	3
P	$0,2$	$0,1$	$0,3$	$0,3$	$0,1$

.

$E(X)=0,2.(-2)+0,1.(-1)+0,3.0+0,3.1+0,1.3=$
$-0,4-0,1+0+0,3+0,3=0,1;$
$E(X^2)=0,2.(-2)^2+0,1.(-1)^2+0,3.0^2+0,3.1^2+0,1.3^2=$
$0,8+0,1+0+0,3+0,9=2,1,$
$D(X)=2,1-(0,1)^2=2,1-0,01=2,09,\ \sigma(X)=\sqrt{2,09}=1,445.$

Примери за пресмятане на числови характеристики

3. пример. В група от 10 студенти са се получили следните резултати от тест по В. математика:

оценка	брой студенти
6	1
5	2
4	4
3	1
2	2

.

Нека X е оценката на случайно избран студент от групата. Да се намери закона за разпределение на X. Да се пресметнат числовите характеристики. Да се изясни смисъла на $E(X)$.
Решение: Сл. величина X приема стойностите $2, 3, 4, 5, 6$.
Съответните благоприятни изходи са
$2 - 2, 3 - 1, 4 - 4, 5 - 2, 6 - 1$. Всички възможни изходи са 10 от където пресмятаме вероятностите $P(X = 2) = \frac{2}{10}$, $P(X = 3) = \frac{1}{10}$, $P(X = 4) = \frac{4}{10}$, $P(X = 5) = \frac{2}{10}$, $P(X = 6) = \frac{1}{10}$.

Примери за пресмятане на числови характеристики

Записваме разпределението на X в таблица:

X	2	3	4	5	6
P	0, 2	0, 1	0, 4	0, 2	0, 1

.

$E(X) = 0,2.2 + 0,1.3 + 0,4.4 + 0,2.5 + 0,1.6 =$
$0,4 + 0,3 + 1,6 + 1,0 + 0,6 = 3,9;$
$E(X) = 0,2.2^2 + 0,1.3^2 + 0,4.4^2 + 0,2.5^2 + 0,1.6^2 =$
$0,8 + 0,9 + 6,4 + 5,0 + 3,6 = 16,7;$
$D(X) = 16,7 - (3,9)^2 = 16,7 - 15,21 = 1,49; \ \sigma X = \sqrt{1,49} = 1,22.$
Математическото очакване на сл. величина X е всъщност средния успех на групата на това контролно. Ето защо:

$$E(X) = \frac{2}{10}.2 + \frac{1}{10}.3 + \frac{4}{10}.4 + \frac{2}{10}.5 + \frac{1}{10}.6 = \frac{2.2 + 1.3 + 4.4 + 2.5 + 1.6}{10} = 3,9$$

Функция на разпределение и плътност

Когато стойносттите на една сл. величина са всички числа от даден интервл (краен или безкраен) законът за разпределение няма как да се зададе в табличен вид. В този случай поведението на сл. величина се описва с нейната функция на разпределение. Тази функция е дефинирана за всяко $x \in (-\infty, \infty)$ така:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Това е вероятността, при провеждане на опита, стойността на случайната величина да е по-малка или равна на зададеното число x. Функцията $f(x) = F'(x)$ се нарича плътност на разпределение на сл. величина.

Формули за пресмятане на вероятности

Следните формули са често използвани:

1. $P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$;
2. $P(X > x) = 1 - F(x) = \int_{x}^{\infty} f(u)du$;
3. $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(u)du$.

Формули за числовите характеристики

1. Математическото очакване се пресмята по формулата $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$;
2. Вторият момент се пресмята по формулата $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$;
3. Дисперсията се пресмята по формулата $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Често използвани непрекъснати разпределения

1. Сл. величина X е равномерно разпределена в интервала $[a, b]$, когато функцията на разпределение е
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x \leq a \\ x, & \text{ако} \quad a \leq x \leq b \\ 1, & \text{ако} \quad x > b. \end{cases}$$
2. Сл. величина X е експоненциално разпределена с параметър $\lambda > 0$, когато функцията на разпределение е
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ако} \quad x > 0. \end{cases}$$
3. Най-често използваното разпределение, нормалното, ще изучим в следващите занятия.

Задачи за самостоятелно решаване

1. Дадена е сл. величина X със закон за разпределение

X	-2	0	1	2
P	$0,3$	$0,2$	p	$0,2$

.

Да се намери стойността на неизвестния параметър p и да се пресметнат числовите характеристики на сл. величина.

2. Дадена е сл. величина X със закон за разпределение

X	-2	-1	1	2	3
P	p	$0,2$	$2p$	$0,2$	$0,3$

.

Да се намери стойността на неизвестния параметър p и да се пресметнат числовите характеристики на сл. величина.

3. В една аптека има 10 служители. Заплатите им са както следва: 2 по 2000 лв, 3 по 1500лв. , 4 по 1000лв. и 1 - 800лв. Нека сл. величина X е заплатата на случайно избран служител в тази аптека. Намерете закона за разпределение на X. Пояснете смисъла на $E(X)$.