МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 15.

Тема: Нормално разпределение.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част (Лекция 15.)*
   - Функция на разпределение и плътност на нормална сл. величина.
   - Стандартно нормално разпределение.
   - Формула за преобразуване на нормална сл. величина $N(m, \sigma^2)$ към стандартна нормална сл величина.
   - Фромули за пресмятане на вероятности свързани с нормално разпределение.
   - Използване на таблица на стандартно нормално разпределение.
2. *Практическа част*
   - Задачи:
     Подробно решени примери по някои от дадените в теоретичната част теми:
     Пресмятане на вероятности за нормално разпределени сл. величини.
     Използване на нормално разпределение в практически задачи.
   - Задачи от за самостоятелно решаване.

Дефиниции

Непрекъсната сл. величина X, която за всяко $x \in (-\infty, \infty)$ взима стойност в интервала $(-\infty, x]$ с вероятност

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du$$

се нарича нормално разпределена сл. величина със средна стойност m и дисперсия σ^2.

Това се означава така $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Да повторим: $m = E(X), \sigma^2 = D(X)$.

Функцията $F_X(x)$ се нарича функция на разпределение на нормалната сл. величина X.

Дефиниции

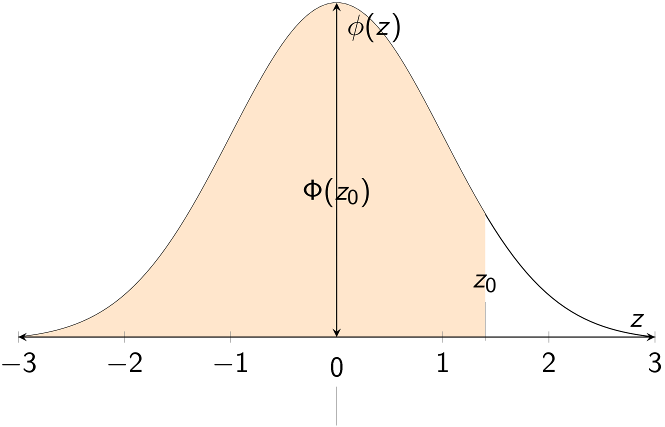
В частния случай, когато $m = 0, \quad \sigma^2 = 1$ сл. величина ще означаваме с Z и нейната функция на разпределение с

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{u^2}{2}} du, \quad z \in (-\infty, \infty)$$

се нарича стандартна нормална сл. величина със средна стойност 0 и дисперсия 1. Това се означава така $Z \sim N(0, 1)$.
Да повторим: $E(Z) = 0, D(Z) = 1$.

Крива на Гаус

Функцията $\phi(z) = \Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{z^2}{2}}, z \in (-\infty, \infty)$ има следната графика известна като крива на Гаус:



Защрихованото лице е $P(Z \leq z_0) = \Phi(z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{z^2}{2}} dz.$

Линейно преобразуване на нормално разпределена сл. величина.

Ако

$$X \sim N(m, \sigma^2), \text{ то } \frac{X - m}{\sigma} = Z \sim N(0, 1).$$

Тази връзка ни дава възможност да пресмятаме вероятности за различни нормално разпределени сл. величини, като ги преобразуваме до $N(0, 1)$ и използваме таблица за стойностите на функцията $\Phi(z)$.
Нека $X \sim N(m, \sigma^2)$. Ще използваме следните формули:

1. $P(X \leq x) = \Phi(z)$, където $z = \dfrac{x - m}{\sigma}$;
2. $P(X \geq x) = 1 - \Phi(z)$, където $z = \dfrac{x - m}{\sigma}$;
3. $P(x_1 < X \leq x_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$, където $z_1 = \dfrac{x_1 - m}{\sigma}$, $z_2 = \dfrac{x_2 - m}{\sigma}$.

Таблица на стандартно нормално разпределение

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767

Продължение на таблицата

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Допълнителни формули

Поради това, че в таблицата са дадени стойностите на $\Phi(z)$ за $z \geq 0$ използваме следните правила:

4. Ако $z < 0$ то $\Phi(z) = 1 - \Phi(|z|)$.
5. Ако $z > 0$ и пресмятаме $P(-z < Z \leq z)$, използваме формулата

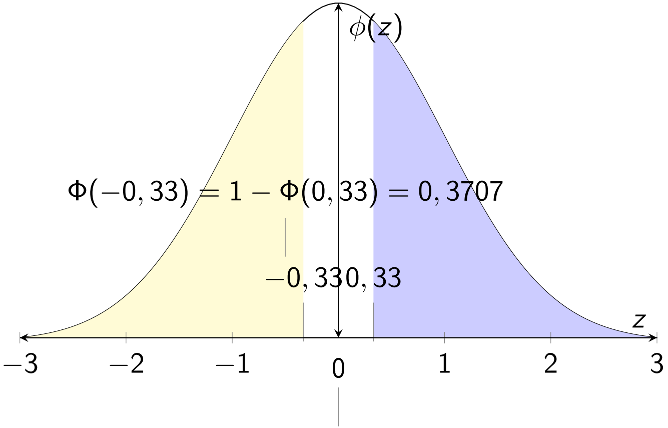
$$P(-z < Z \leq z) = 2.\Phi(z) - 1.$$

Решени примери

1. пример. Случайната величина X е нормално разпределена със средно $m = 2$ и стандартно отклонение $\sigma = 3$ ($X \sim N(2, 3^2)$. Да се намерят вероятностите:
а) $P(X \leq 1)$; б) $P(-1,5 < X \leq 1,6)$; в) $P(X > 1,9)$.
Решение: а) Пресмятаме числото $z = \frac{1-2}{3} = \frac{-1}{3} = -0,33$. Тогава търсената вероятност по формула 1. е $P(X \leq 1) = \Phi(-0,33)$. Поради това, че числото $z = -0,33 < 0$, ще използваме формулата 4. с която намираме $\Phi(-0,33) = 1 - \Phi(0,33)$. Сега в таблицата намираме в най-лявата колона z числото $0,3$ и в най-горния ред числото 3. Където се пресичат реда и колоната е $\Phi(0,33) = 0,6293$. Така $P(X \leq 1) = 1 - 0,6293 = 0,3707$.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Решени примери

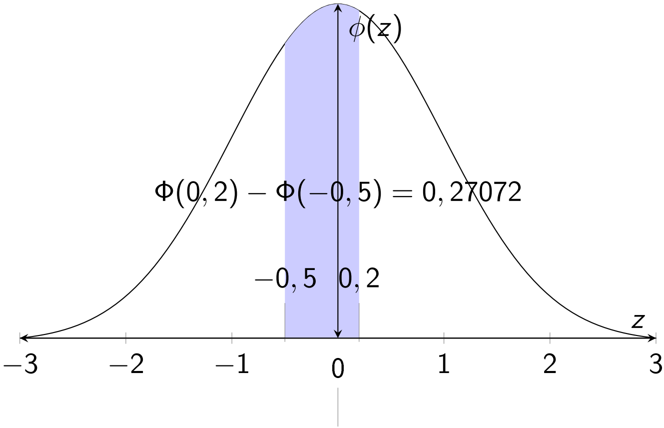


а) $P(X \leq 1) = \Phi(-0,33) = 1 - \Phi(0,33) = 0,3707$. Намереното в таблицата $\Phi(0,33) = 0,6293$ съответства на защрихованото лице под кривата на Гаус.

Решени примери

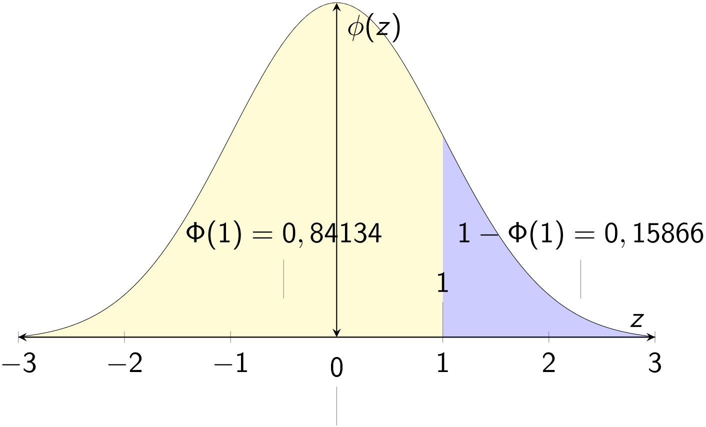
Решение: б) Пресмятаме числата $z_1 = \frac{0{,}5-2}{3} = \frac{-1{,}5}{3} = -0,5$ и $z_2 = \frac{2{,}6-2}{3} = \frac{0{,}6}{3} = 0,2$. Тогава търсената вероятност по формула 2. е $P(0,5 < X \leq 2,6) = \Phi(0,2) - \Phi(-0,5)$. Поради това, че числото $z_1 = -0,5 < 0$, ще използваме формулата 4. с която намираме $\Phi(-0,5) = 1 - \Phi(0,5)$.
В таблицата намираме $\Phi(0,2) = 0,57926$ и $\Phi(0,5) = 0,69146$ и завършваме пресмятането.
Така $P(0,5 < X \leq 2,6) = \Phi(0,2) - (1 - \Phi(0,5)) =$
$\Phi(0,2) + \Phi(0,5) - 1 = 0,57926 + 0,69146 - 1 = 1,27072 - 1 = 0,27072$.
Решение: в) Пресмятаме числото $z = \frac{5-2}{3} = 1$. По формула 3. имаме $P(X > 5) = 1 - \Phi(1)$. В таблицата намираме $\Phi(1) = 0,84134$.
Така $P(X > 5) = 1 - 0,84134 = 0,15866$.

Решени примери



б) $P(0,5 < X \leq 2,6) = \Phi(0,2) - \Phi(-0,5)$.

Решени примери



в) $P(X > 5) = 1 - \Phi(1)$.

Решени примери

2. пример. Теглото на хапчетата, произвеждани от една автоматична преса е случайна величина X разпределена по нормален закон със средно $m = 10,00g$. и стандартно отклонение $\sigma = 0,055g$. Намерете вероятността за това, че теглото на случайно взето хапче е в границите от $9,90g$. до $10,12g$. Колко, приблизително, хапчета с такова тегло ще има в опаковка от 150 хапчета?
Решение: Трябва да намерим $P(9,90 < X \leq 10,12)$. Пресмятаме числата $z_1 = \frac{9{,}90-10{,}00}{0{,}055} = -1,81$ и $z_2 = \frac{10{,}12-10{,}00}{0{,}055} = 2,18$.
Тогава по формула 2. имаме
$P(9,90 < X \leq 10,12) = \Phi(2,18) - \Phi(-1,81) =$
$\Phi(2,18) - (1 - \Phi(1,81)) = \Phi(2,18) + \Phi(1,81) - 1 =$
$0,98537 + 0,96485 - 1 = 1,95022 - 1 = 0,95022$, като сме намерили по таблицата $\Phi(2,18) = 0,98537$ и $\Phi(1,81) = 0,96485$.
Делът на хапчетата, които попадат в тези граници е приблизително равен на $0,95022 \times 150 \approx 143$.

Решени примери

3. пример. Диаметърът на дупките пробивани с една бормашина е нормално разпределена случайна величина X със средно $m = 4$mm и стандартно отклонение $\sigma = 0,0028$mm. Каква е вероятността случайно измерена дупка да е с диаметър между 3,998mm и 4,003mm? Какъв е приблизително делът на дупките с такъв диаметър сред 20-те пробити с бормашината?
Решение: Трябва да намерим $P(3,998 < X \leq 4,003)$. Пресмятаме числата $z_1 = \frac{3{,}998-4{,}000}{0{,}0028} = -1,42$ и $z_2 = \frac{4{,}003-4{,}000}{0{,}0028} = 1,07$.
Тогава по формула 2. имаме
$P(3,998 < X \leq 4,003) = \Phi(1,07) - \Phi(-0,71) = \Phi(1,07) - (1 - \Phi(0,71)) = \Phi(1,07) + \Phi(0,71) - 1 = 0,85769 + 0,76115 - 1 = 1,61884 - 1 = 0,61884$, като сме намерили по таблицата $\Phi(1,07) = 0,85769$ и $\Phi(0,71) = 0,76115$.
Делът на дупките, които попадат в тези граници е приблизително равен на $0,61884 \times 20 \approx 12$.

Задачи за самостоятелно решаване

1. Диаметърът на един детайл, произведен в даден цех е нормално разпределена сл. величина X със средно $m = 75$мм и стандартно отклонение $\sigma = 2,6$мм. Детайлът се бракува, ако диаметърът му е по-малък от 72мм. Дневната продукция е 650 детайла. Приблизително колко детайла ще се бракуват за деня?
2. Теглото на хапчетата, произвеждани от една автоматична преса е случайна величина X разпределена по нормален закон със средно $m = 5,00g$. и стандартно отклонение $\sigma = 0,036g$. Намерете вероятността за това, че теглото на случайно взето хапче е в границите от $4,94g$. до $5,04g$. Колко, приблизително, хапчета с такова тегло ще има в опаковка от 200 хапчета?
3. Установено е, че коефициентът на интелигентност (IQ) е нормално разпределена случайна величина X със средно $m = 100$ и средно квадратично отклонение $\sigma = 12$. Каква е вероятността коефициентът на интелигентност на случайно взет човек да е: а) по-малък от 80; б) между 90 и 110; в) повече от 120?

Задачи за самостоятелно решаване

4. Съдържанието на една кутия с боя е нормално разпределена случайна величина със средно $m = 1000$мл и стандартно отклонение $\sigma = 8,5$мл. В един контейнер има 1000 кутии с боя. Каква е вероятността съдържанието на случайно взета кутия да е: а) по-малко от 1015мл; б) по-малко от 900мл. Какъв е приблизително делът на кутиите, съдържащи по-малко от 900 мл боя?