МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 2.

Тема: Матрици - Действия с матрици.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част*
   - Линейни операции с матрици.

     - Определение, редове, колони, размерност.
     - Равенство на две матрици.
     - Правила за събиране и изваждане на матрици.
     - Правило за умножение на марица с число.
     - Транспониране на матрица.
   - Умножение на матрици по правилото ред по стълб. Условия за извършване на умножението.
2. *Практическа част*
   - Задачи:

     - Подробно решени примери от дадените в теоретичната част теми.
     - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Определение. Размерност. Равенство на матрици -1.

1. Определение. Матрицата е правоъгълна таблица с числа.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   Числата a_{ij} се наричат елементи на матрицата. Размерност на матрицата наричаме броя на редовете $\times$ броя на колоните (стълбовете) $(m \times n)$.

2. Две матрици са равни, ако са с еднаква размерност и на еднаквите по ред и стълб места стоят равни числа.

Определение. Размерност. Равенство на матрици -2.

1. пример. Матрицата $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ е с размерност 2×3. Има 2 реда и три колони. Елеметът $a_{22} = 3$. Това е елементът, стоящ на 2 ред, 2 колона.
2. пример. Матриците $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2+1 & -3 & 1 \\ -4+1 & -1 & 2-2 \end{pmatrix}$ са равни защото на съответните места в двете матрици числата са равни.
3. пример. Матриците $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ не са равни, защото $a_{22} = 3$, а $b_{22} = -5$.

1. пример 1. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
Ще пресметнем:
а) сумата $A + B$;
б) разликата $A - B$;
в) произведението $3.A$;
г) транспонираната матрица B^T.

Решения а)

Събирането се извършва елемент по елемент:

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3+(-2) & -3+(-4) & 1+3 \\ 2+2 & 3+0 & -2+(-2) \\ -3+(-3) & -1+3 & 0+(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 4 & 3 & -4 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решения б)

Изваждането се извършва по същия начин (елемент по елемент):

$$
\begin{aligned}
A - B &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3-(-2) & -3-(-4) & 1-3 \\ 2-2 & 3-0 & -2-(-2) \\ -3-(-3) & -1-3 & 0-0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Решения в)

Умножението на матрица с число се извършва, като се умножи всеки елемент на матрицата с числото:

$$
\begin{aligned}
3.A &= 3.\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3.3 & 3.(-3) & 3.1 \\ 3.2 & 3.3 & 3.(-2) \\ 3.(-3) & 3.(-1) & 3.0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & -9 & 3 \\ 6 & 9 & -6 \\ -9 & -3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Решения г)

Транспонираната матрица се получава като редовете на дадената стават стълбове на транспонирането:

$$B^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

.

Задача за самостоятелно решаване

Дадени са мтриците $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Пресметнете:

а) $D = 3.A - 2.B + 4.C^T$;

б) $M = 2.A^T - 3.B + C$;

в) $N = A^T + 2.B^T - 3.E$.

Правило **ред по стълб**

Умножението на матрици се извършва по правилото ред по стълб. Поради това *броят на стълбовете на първия множител* трябва да е равен на *броя на редовете на втория множител*.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}}_{k-\text{стълба}} \times \left.\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}\right\} k-\text{реда}$$

Така произведението на двете матрици

ще е с размери m-реда (колкото са редовете на първия множител) $\times$ n-стълба (колкото са стълбовете на втория множител). Елементът, стоящ на i-тия ред и j-тия стълб в произведението, се получава като се умножат i-тия ред на първата матрица с j-тия стълб на втората матрица:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ a_{kj} \end{pmatrix} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \dots + a_{ik}.b_{kj}$$

Решени примери

1. пример. Ще пресметнем произведението

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.2 + (-1).(-1) + 3.4 & 2.(-1) + (-1).2 + 3.1 \\ 2.2 + 0.(-1) + (-1).4 & 2.(-1) + 0.2 + (-1).1 \\ -3.2 + 1.(-1) + 1.4 & -3.(-1) + 1.2 + 1.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Задачи за самостоятелно решаване

Пресметнете произведенията:

1. $$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задачи:

1. задача. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Пресметнете матрицата $B = A^2 - 5.A + 4.E$.
2. задача. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
   Пресметнете матрицата $B = 2.A^2 - A + 2.A^T$.
3. задача. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Пресметнете матрицата $B = A^2 - 4.A + 2.E$.

В 1 и 2 задача $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ е единичната матрица от 2 ред, а в трета задача от трети ред, т.е. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение на 1 задача.

Първо ще пресметнем $A^2 = A.A$.

$$\begin{aligned} A.A &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3.3 + 3.(-2) & 3.3 + 3.1 \\ -2.3 + 1.(-2) & -2.3 + 1.1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

След това пресмятаме

$$5.A = 5.\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } 4.E = 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение на 1 задача - продължение

Накрая пресмятаме

$$
\begin{aligned}
B &= A^2 - 5.A + 4.E \\
&= \left[\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3-15 & 12-15 \\ -8-(-10) & -5-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -12 & -3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Решете самостоятелно втора и трета задача.