МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 3.

Тема: Детерминанти - определение, свойства и пресмятане.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част*
    - Правила за пресмятане на детерминати.
      - Детерминанти от втори ред.
      - Детерминанти от трети ред: Правило на Сарус и правило на триъгълниците.
      - Минор и адюнгирано количество - определения.
      - Формула за пресмятане на детерминанти от 4 и по-висок ред.
      - Основни свойства на детерминантите.
      - Елементарни преобразувания, които не променят стойността на детерминантата.
2. *Практическа част*
    - Задачи:
      - Подробно решени примери от дадените в теоретичната част теми.
      - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Детерминанти от втори ред

Правило за пресмятане на детерминанта от 2-ри ред:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}.$$

1. пример

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (-5).2 - (-2).(-3) = -10 - 6 = -16.$$

2. пример

$$\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 4 & 0,2 \end{vmatrix} = 10.0,2 - (-2).4 = 2 - (-8) = 2 + 8 = 10.$$

Задача за самостоятелно решаване

Пресметнете детерминантите от 2 ред:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2,5 \\ 4 & 0,2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}.$$

Детерминанти от 3-ти ред. Правило на Сарус.

Дописваме първите две колони на детерминантата вдясно от дясната вертикална черта.
Произведенията на числата върху трите диагонала, определени с червените линии, са със знак $+$, а произведенията на числата върху трите диагонала, определени със сините линии взимаме със знак -:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{11}.a_{12}.a_{23} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$

$$-a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}.$$

Решени примери по правилото на Сарус

1. пример

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -3 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right|$$

$$= 3.3.0 + (-3).(-2).0 + 1.2.(-1) - 1.3.(-3) - 3.(-2).(-1) - (-3).2.0$$

$$= 0 + 0 - 2 + 9 + 6 - 0 = 13.$$

2. пример

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & -4 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right|$$

$$= 2.2.3 + 0.(-4).(-1) + 3.(-5).(-2) - (-1.2.3 - 2.(-4).2 - 3.(-5).0)$$

$$= 12 + 0 + 30 - (-6 + 16 - 0) = 32.$$

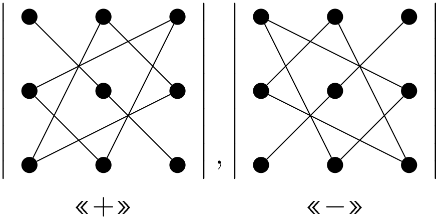
Задачи за самостоятелно решаване по правилото на Сарус:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

Детерминанти от 3-ти ред. Правило на триъгълниците.

Правилото на триъгълниците е показано на следната схема:



От лявата фигура се образуват три произведения, които се взимат със знак +, а от дясната - три произведения, които се взимат със знак -. Събираме получените произведенията с така определените знаци.

Решени примери по правилото на триъгълниците

1. пример

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -6 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 4.3.0 + (-3).(-2).(-6) + 1.(-4).1$$
$$-(-6).3.1 - 1.(-3).0 - 4.(-4).(-2)$$
$$= 0 - 36 - 4 + 18 - 0 - 32 = -54.$$

2. пример

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 9 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2.5.1 + (-3).(-1).(-2) + 4.(-3).9$$
$$-(-2).5.4 - (-3).(-3).2 - 9.(-1).1$$
$$= 10 - 108 + 40 - 18 + 9 = -67.$$

Задачи за самостоятелно решаване по правилото на триъгълниците

Пресметнете детерминантите от 3 ред по правилото на триъгълниците:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -6 & -4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & -2 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 & 7 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 12 \end{vmatrix}.$$

Уравнения зададени с детерминанти.

1. Решете уравненията

$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} x-4 & -2 \\ -3 & x-3 \end{vmatrix} = -12, \quad \begin{vmatrix} -4 & -2-x \\ -3 & -4-x \end{vmatrix} = 5,$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & -4 \\ -3 & x-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & x-3 & 1 \\ 2 & 3 & x-2 \\ -3 & -1 & x \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & x-2 \\ x-3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Решен пример

Решение: $\begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 3.$

Пресмятаме детерминантата

$\begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (x-3).4 - (-2).(-3) = 4x - 12 - 6 = 4x - 18.$

Полученият израз приравняваме на 3 и решаваме полученото уравнение

$$4x - 18 = 3 \Leftrightarrow 4x = 3 + 18 \Leftrightarrow 4x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4} = 5,25.$$

Адюнгирано количество. Формула за пресмятане на детерминанта от по-висок ред.

Адюнгираното количество, съответстващо на елемента a_{ij} в дадена детерминатa от ред n, е стойността на поддетерминантата от ред $n-1$, която остава след премахване $i-$тия ред и $j-$тия стълб, умножена с $(-1)^{i+j}$.
Стойността на детерминанта от ред n пресмятаме по формулата $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, където $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ са елементите на $i-$тия ред, а $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ са техните адюнгирани количества. В такъв случай казваме, че детерминантата е развита по елементите на $i-$тия ред. Аналогично $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$, където $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ са елементите на $i-$тия стълб, а $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$ са техните адюнгирани количества. В такъв случай казваме, че детерминантата е развита по елементите на $j-$тия стълб.

Пример за пресмятане на детерминанта от 4-ти ред

Ще развием детерминантата $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ по елементите на втория ред.

1. Намираме поддетерминантата D_{21} като зачеркваме втория ред и първия стълб

$$\begin{vmatrix} \cancel{3} & 3 & -3 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ \cancel{4} & 2 & -2 & 5 \\ \cancel{-1} & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Пример за пресмятане на детерминанта от 4-ти ред

2. Пресмятаме детерминантата D_{21} например по правилото на триъгълниците

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 15 - 0 = 15.$$

След това пресмятаме адюнгираното количество $A_{21} = (-1)^{2+1} D_{21} = (-1).15 = -15.$

3. По същия начин намираме $A_{22} = 30, A_{23} = 15, A_{24} = 6.$
4. По формулата за пресмятане на детерминанти от по-висок ред получаваме:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23} + a_{24}.A_{24} \\ &= 2.(-15) + (-1).30 + 3.15 + 2.6 = -3. \end{aligned}$$

Задачи за самостоятелно решаване

1. Пресметнете адюнгираните количества на елементите от третия стълб на детерминантата и пресметнете детерминантата
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$
2. Като използвате някое от свойствата на детерминантите пресметнете следните детерминанти:
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$