МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 4.

Тема: Обратна матрица. Системи линейни уравнения.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част*
    - Определение за обратна матрица.
      - Особена и неособена матрица.
      - Формула за обратна матрица с адюнгирани количества.
    - Елементарни преобразувания: а) размяна на редове (стълбове); умножение на ред (стълб) с число различно от 0; прибавяне на ред (стълб) умножен с число към друг ред (стълб).
    - Метод на Гаус-Жордан за обръщане на матрица.
    - Формули на Крамер за решаване на системи линейни уравненя.
    - Метод на Гаус за решаване на системи линейни уравнения..
2. *Практическа част*
    - Задачи:
      - Подробно решени примери от дадените в теоретичната част теми.
      - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Определение за обратна матрица

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ е квадратна матрица. Ако съществува друга квадратна матрица (да я означим с A^{-1}) такава, че да са в сила равенствата $A.A^{-1} = E, A^{-1}.A = E$, където $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ е единичната матрица с размери $n \times n$, тогава матрицата A^{-1} наричаме обратна на A. Естествено A пък е обратна на A^{-1}, т.е. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Формула за обратна матрица

Ако детерминантата на тази матрица $|A| \neq 0$, матрицата

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} е обратната на A.

Ако детерминантата $|A| = 0$, матрицата A няма обратна. Такава матрица се нарича *особена*.

Да напомним, че детерминанти имат само квадратните матрици.

Примери

1. пример. Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Пресмятаме $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$. Следователно матрицата е неособена и има обратна.

   Намираме адюнгираните количества:

   $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} .(-1)^{1+1} = (-1-0).1 = -1.$

   $A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} .(-1)^{1+2} = (2+2).(-1) = -4.$

   $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} .(-1)^{1+3} = (0-1).1 = -1.$

Примери

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} .(-1)^{2+1} = (2-0).(-1) = -2.$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} .(-1)^{2+2} = (1+3).1 = 4.$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} .(-1)^{2+3} = (0+2).(-1) = -2.$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} .(-1)^{3+1} = (4+30).1 = 7.$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} .(-1)^{3+2} = (3-6).(-1) = 3.$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} .(-1)^{3+3} = (-1-4).1 = -5.$$

Примери

Така по формулата намираме
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -4 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$
Да обърнем внимание, че:

- адюнгираните количества на елеметите от първия ред на матрицата A образуват първия стълб на матрицата A^{-1};

- адюнгираните количества на елеметите от втория ред на матрицата A образуват втория стълб на матрицата A^{-1};

- адюнгираните количества на елеметите от третия ред на матрицата A образуват третия стълб на матрицата A^{-1}.

Примери

2. пример За $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ пресмятаме $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$. Ако $a.d - b.c \neq 0$, намираме $A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$. Тогава $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
3. пример За $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ пресмятаме $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1) - 1.3 = -5 \neq 0$. След това $A_{11} = -1, A_{12} = -3, A_{21} = -1, A_{22} = 1$. Тогава $A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

Задачи за самостоятелно решаване

Намерете обратните матрици, когато съществуват:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Намиране на обратна матрица

Методът на Гаус-Жордан за обръщане на матрица се състои в следното: От дадената матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и единичната матрица от същия ред образуваме следната разширена матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Намиране на обратна матрица

Върху редовете на тази разширена матрица изпълняваме елементарни преобразувания докато я доведем до следния вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{array}\right)$$

Тогава

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

е търсената обратна матрица.

Пример

Ще намерим обратната матрица на

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Записваме разширената матрица и правим следните две преобразувания, с които получаваме необходимия вид на първата колона

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1 \quad -2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \quad + \end{array} \sim$$

Намиране на обратна матрица

Сега използваме единицата в средата на втория ред за да получим втората колона

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {\color{blue}1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{-2} \\ + \end{array}$$

Следващото преобразувание е

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {\color{blue}-1} & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ 2 \end{array}$$

Намиране на обратна матрица

Умножаваме елеметите на последния ред с (-1) за да завършим решението

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \times \text{-1}$$

След като вляво от вертикалната черта се получи единичната матрица, то вдясно от нея се намира обратната матрица на дадената

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right), \texttt{ т.е. } A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Намиране на обратна матрица

Намерете обратната матрица по метода на Гаус-Жордан:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Формули на Крамер

Ще припомним формулите на Крамер с пример. Да разгледаме системата:

$$\left|\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 3 \\ -x & +y & -2z & = -3 \\ 2x & +2y & +z & = 6. \end{array}\right.$$

За да я решим, пресмятаме детерминантата D от коефициентите пред неизвестните (например по правилото на Сарус)

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right| \\ &= 1.1.1 + 0.(-2).2 + 2.(-1).2 - 2.1.2 - 2.(-2).1 - 1.(-1).0 \\ &= 1 + 0 - 4 - 4 + 4 - 0 = -3. \end{aligned}$$

После пресмятаме детерминантите D_1, D_2 и D_3 които се получават от D като се замени съответно първия, втория и третия стълб със стълба от десните страни на уравненията.

Формули на Крамер

Така

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Сега формулите на Крамер дават решението на системата:

$$x = \frac{D_1}{D} = 3, \; y = \frac{D_2}{D} = 0, \quad z = \frac{D_3}{D} = 0.$$

Задачи за самостоятелно решаване

Решете системите уравнения по формулите на Крамер:

$$\left|\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & 3 \\ x & +2y & -2z & = & -1 \\ -x & +2y & +3z & = & 12 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & -1 \\ x & +2y & -2z & = & -5 \\ -x & +2y & +3z & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$\left|\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & -1 \\ x & +2y & -2z & = & -5 \\ -x & +2y & +3z & = & 0 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & -1 \end{array}\right.,$$

$$\left|\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 2 \end{array}\right..$$

Метод на Гаус-Жордан-първи начин

Намирането на обратна матрица по метода на Гаус-Жордан може да се използва за решаване на системи линейни уравнения.

Ще решим системата системата $\left| \begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & 3 \\ x & +2y & -2z & = & -1 \\ x & +2y & +3z & = & 9 \end{array} \right.$.

Първи начин: Образуваме матрицата от коефициентите пред неизвестните $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и намираме нейната обратна

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2/5 & -1/10 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$. Решението на системата се получава като умножим A^{-1} със стълба от десните страни на уравненията $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ по правилото ред по стълб:

Метод на Гаус-Жордан-първи начин

Така получаваме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2/5 & -1/10 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Метод на Гаус-Жордан - втори начин

Втори начин: Двете действия, намирането на обратната матрица и умножението могат да се извършат едновременно така:
Записваме системата в матричен вид и с помощта на елеметарните преобразувания довеждаме лявата страна до единичната матрица. Тогава в дясно от вертикалната черта се получава решението на системата.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{-3} \quad \text{-1} \\ + \\ \quad\;\; + \end{array}$$

Метод на Гаус-Жордан-втори начин

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) : \; 5 \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ + \\ \text{-5} \quad 2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) : \; \text{-4} \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ \text{-2} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Така решението на системата е $x = 1, y = 1, z = 2$.

Метод на Гаус

При метода на Гаус, с помощта на същите елементарни преобразувания които използвахме и при метода на Гаус-Жордан, се привежда матрицата от коефициентите пред неизвестните в триъгълен вид (прав ход), след което се изпълнява така нареченият обратен ход, при който се намират неизвестните. Да припомним, че с метода на Гаус могат да се решават и неопределени системи (в които броят на уравненията е по-малък от броя на неизвестните), което не е възможно с форулите на Крамер.
Ще решим следната система:

$$\left| \begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -2 \\ -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

Системата е неопределена. Имаме три уравнения с четири неизвестни. С помощта на няколко елементарни преобразувания ще приведем матрицата в триъгълен вид.

Метод на Гаус

Записваме системата в матричен вид:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Правим последователно следните преобразувания:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3 \quad -1 \\ + \\ \quad + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array}$$

Метод на Гаус

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

С това е завършен правият ход. Системата е приведена в триъгълен вид. Записваме я в стандартен вид:

$$\left| \begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -2 \\ & -x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & -3 \\ & & -6x_3 & +3x_4 & = & 4. \end{array} \right.$$

Метод на Гаус

Сега ще изпълним обратния ход. В последното уравнение приемаме, например, че $x_3 = p \in (-\infty, \infty)$ и изразяваме x_4.
Така $x_4 = \frac{4+6x_3}{3} = \frac{4}{3} + 2p$.
Заместваме във второто уравнение x_3 с p, x_4 с $\frac{4}{3} + 2p$ и получаваме

$$-x_2 \quad +4p \quad -(\tfrac{4}{3} + 2p) \quad = \quad -3,$$

от тук намираме $x_2 = 3 + 4p - (\frac{4}{3} + 2p) = 3 + 4p - \frac{4}{3} - 2p = \frac{5}{3} + 2p$.
Накрая заместваме x_2, x_3 и x_4 в първото уравнение

$$x_1 \quad -(\tfrac{5}{3} + 2p) \quad +p \quad -(\tfrac{4}{3} + 2p) \quad = \quad -2.$$

От тук намираме
$x_1 = -2 + (\frac{5}{3} + 2p) - p + (\frac{4}{3} + 2p) = -2 + \frac{5}{3} + 2p - p + \frac{4}{3} + 2p = 1 + 3p.$

Метод на Гаус

Така намерихме общото решение на системата

$$(x_1 = 1 + 3p, x_2 = \frac{5}{3} + 2p, x_3 = p, x_4 = \frac{4}{3} + 2p),$$

където $p \in (-\infty, \infty)$.
При всяко реално p получаваме едно частно решение. Решението, което се получава при $p = 0, (1, \frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3})$ се нарича фундаментално решение.

Задачи за самостоятелно решаване

Решете системите по метода на Гаус:

$$\left|\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & 3 \\ x & +2y & -2z & = & -1 \\ -x & +2y & +3z & = & 12 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & -1 \\ x & +2y & -2z & = & -5 \\ -x & +2y & +3z & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$\left|\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & -1 \\ x & +2y & -2z & = & -5 \\ -x & +2y & +3z & = & 0 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & -1 \end{array}\right.,$$

$$\left|\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 2 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -4 \\ -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -1 \end{array}\right..$$