МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 5.

Тема: Вектори.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

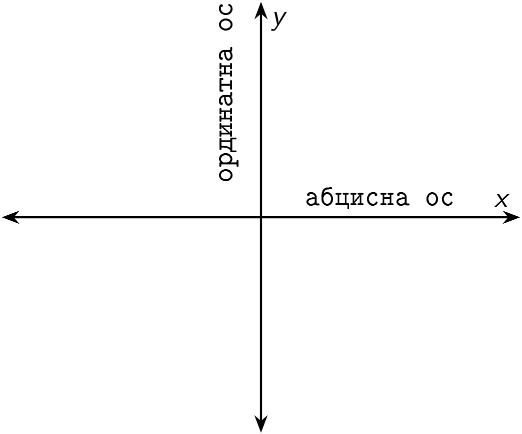
гр. Плевен 2020г.

План на занятието

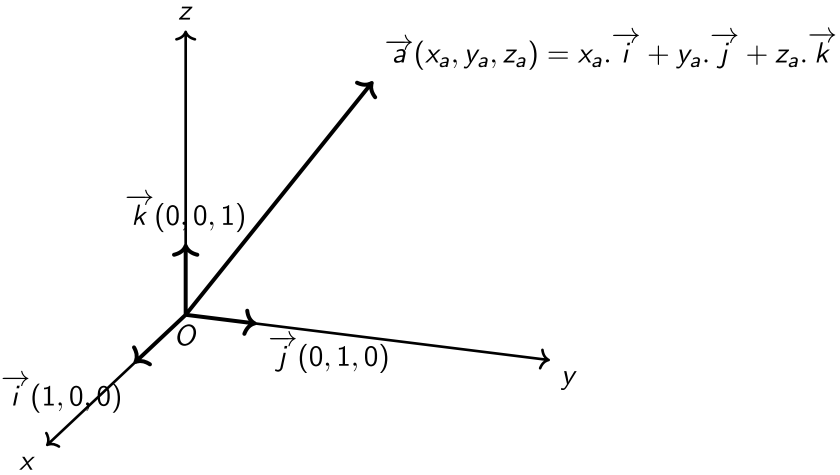
1. *Теоретична част*
    - Правоъгълна координатна система в равнината и пространството.
    - Координати на вектор. Единични вектори в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.
    - Линейни операции с вектори: събиране и умножение с число.
    - Координати на вектор по задададени начало и край. Среда на отсечка.
    - Скаларно умножение на два вектора.
    - Дължина на вектор. Ъгъл между два вектора.
2. *Практическа част*
    - Задачи:
      - Подробно решени примери от дадените в теоретичната част теми.
      - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Правоъгълна координатна система в равнината

Координатна система Oxy в равнината



Правоъгълна координатна система в пространството



Събиране на вектори. Умножение на вектор с число.

1. пример. Дадени са векторите $\vec{a}(2,-3,5)$, $\vec{b}(2,-1,9)$. Запишете векторите като линейна комбинация на единичните вектори $\vec{i}(1,0,0)$, $\vec{j}(0,1,0)$, $\vec{k}(0,0,1)$. Намерете координатите на вектора $\vec{c} = 2.\vec{a} - 3.\vec{b}$. Представете го като линейна комбинация на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

   Решение: Записваме $\vec{a}$ и $\vec{b}$ като линейни комбинации на единичните вектори:

$$
\begin{array}{cccccc}
\vec{a} & (& 2, & -3, & 5 &) \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\vec{a} & = & 2\vec{i} & -3\vec{j} & +5\vec{k}. &
\end{array}
$$

   Така $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и по същия начин $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$.

Събиране на вектори. Умножение на вектор с число.

За да намерим координатите на вектор $\overrightarrow{c}$, намираме векторите

$$2.\overrightarrow{a} = 2.(2, -3, 5) = (2.2, 2.(-3), 2.5) = (4, -6, 10),$$

след това намираме координатите на вектора

$$-3.\overrightarrow{b} = (-3.2, -3.(-1), -3.9) = (-6, 3, -27).$$

Намираме вектора $\overrightarrow{c}$ в координтна форма като сума на $2.\overrightarrow{a}$ и $-3.\overrightarrow{b}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{c} &= 2.\overrightarrow{a} - 3.\overrightarrow{b} \\ &= (4, -6, 10) + (-6, 3, -27) = (4-6, 3+3, 10-27) = (-2, 6, -17). \end{aligned}$$

Накрая записваме $\overrightarrow{c}$ чрез единичните вектори:
$\overrightarrow{c}(-2, 6, -17) = -2.\overrightarrow{i} + 6.\overrightarrow{j} - 17.\overrightarrow{k}$.

Решете самостоятелно:

1. Дадени са векторите $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$. Запишете ги в координатна форма и намерете вектора $\overrightarrow{c} = 2.\overrightarrow{a} + 4.\overrightarrow{b}$.
2. Дадени са векторите $\overrightarrow{a} = -3.\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{b} = 2.\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Запишете ги в координатна форма и намерете вектора $\overrightarrow{c} = 2.\overrightarrow{a} + 4.\overrightarrow{b}$.

   Упътване. Когато в задаването на вектора чрез единичните вектори, някой от тях липсва, в координатна форма съответната координата е 0. Когато пред единичния вектор не е написан коефициент, съответната координата е 1.

Координати на вектор по зададени начало и край

Дадени са точките $A(1,-2,3)$, $B(-4,0,-5)$ и $C(3,-2,8)$. Намерете векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и вектора $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

Решение: Координатите на вектор по зададени координати на началото и края намираме като от координатите на края извадим координантите на началото.

Така $\overrightarrow{AB}$ намираме като от координатите на края $B(-4,0,-5)$ извадим съответните координати на началото $A(1,-2,3)$:

$$\overrightarrow{AB}(-4-1,0-(-2),-5-3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(-5,2,-8).$$

Среда на отсечка.

По същия начин намираме $\overrightarrow{AC}(3-1,-2-(-2),8-3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(2,0,5)$.
Ще намерим координатите на точката $M(x,y,z)$ такава, че
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, т.е. M е средата на отсечката AB.
Пресмятаме координатите на вектора
$\overrightarrow{AM} = (x-1, y-(-2), z-3) = (x-1, y+2, z-3)$.
Пресмятаме и координатите на вектора
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2}.(-5), \frac{1}{2}.2, \frac{1}{2}.(-8)) = (-\frac{5}{2}, 1, -4)$.
Тъй като $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, то координатите им са равни.
Следователно: $x-1=-\frac{5}{2}; y+2=1; z-3=-4$.
От тези три уравнения намираме $x=1-\frac{5}{2}; y=1-2; z=-4+3$.
Така $M(-\frac{3}{2},-1,-1)$.

Среда на отсечка. Задача за самостоятелно решаване.

По същия начин се получава и общата формула за среда на отсечка. Ако $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ са две дадени точки, средата на отсечката PQ, S има координати

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

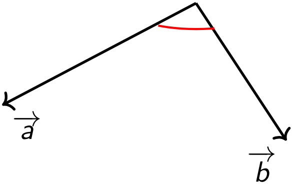
Като използвате тази формула, пресметнете координатите на средите на отсечките AC и BC, където $A(1, -2, 3)$, $B(-4, 0, -5)$ и $C(3, -2, 8)$ са дадените точки.

Скаларно произведение-определение-1

Дадени са векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Числото

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|.\cos\measuredangle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}),$$

където с $|\overrightarrow{a}|$ и $|\overrightarrow{b}|$ са означени дължините на векторите, се нарича скаларно произведение на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.



Скаларно произведение-определение-2

Ако векторите $\overrightarrow{a} = (x_a, y_a, z_a)$ и $\overrightarrow{b} = (x_b, y_b, z_b)$ са дадени с техните координати, скаларното произведение се определя така:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = x_a.x_b + y_a.y_b + z_a.z_b.$$

Двете определения са еквивалентни. От тях извеждаме формулите за дължина на вектор, ъгъл между два вектора и дължина на отсечка:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_2^2}; \quad \cos\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|};$$

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Задачи

1. пример. Дадени са векторите $\overrightarrow{a} = (3, 2, 6)$ и $\overrightarrow{b} = (2, -1, 0)$. Пресметнете $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$, $\cos\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.
   Решение: Пресмятаме последователно:
   - скаларното произведение
   $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 3.2 + 2.(-1) + 6.0 = 6 - 2 + 0 = 4.$;
   - дължините на векторите
   $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7,$
   $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}.$
   - накрая намираме $\cos\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|} = \frac{4}{7.\sqrt{5}}.$
2. Дадени са векторите $\overrightarrow{a} = (2, -4, 0)$ и $\overrightarrow{b} = (-2, -1, 0)$. Проверете дали са взаимно перпендикулярни.
   Решение: Пресмятаме скаларното произведение
   $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 2.(-2) + (-4).(-1) + 0.0 = 4 + 4 + 0 = 0.$ Следователно двата вектора са взаимно перпендикулярни.

3. Дадени са векторите $\overrightarrow{a} = (3, x, 2 - x)$ и $\overrightarrow{b} = (1, x, -2)$. Намерете стойностите на x , за които те са взаимно перпендикулярни.
   Решение: Пресмятаме скаларното произведение $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 3.1 + x.x + (2 - x).(-2) = 3 + x^2 - 4 + 2x = x^2 + 2x - 1$. За да са взаимно перпендикулярни векторите трябва $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = x^2 + 2x - 1 = 0$. Решаваме уравнението $x^2 + 2x - 1 = 0$ и намираме $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = -1 + \sqrt{2}$. При тези стойности на x двата вектора ще са взаимно перпендикулярни.
4. Дадени са върховете на триъгълника ABC: $A(2, 3)$, $B(3, 4)$ и $C(-1, -2)$. Намерете косинуса на ъгъла при върха A.
   Решение: Намираме координатите на векторите: $\overrightarrow{AB}(3 - 2, 4 - 3) = (1, 1)$, $\overrightarrow{AC}(-1 - 2, -2 - 3) - (-3, -5)$. Тогава $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1.(-3) + 1.(-5) = -8.$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$. Така $\cos\measuredangle A = \frac{-8}{\sqrt{2}\sqrt{34}}$.

Задачи за самостоятелно решаване

1. Дадени са векторите $\overrightarrow{a} = (5, -2, 1)$ и $\overrightarrow{b} = (2, 1, 4)$. Пресметнете $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$, $\cos\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.
2. Дадени са векторите $\overrightarrow{a} = (0, -4, 4)$ и $\overrightarrow{b} = (5, -2, 2)$. Проверете дали са взаимно перпендикулярни.
3. Дадени са векторите $\overrightarrow{a} = (3, -x, 2 - x)$ и $\overrightarrow{b} = (-1, x, 2)$. Намерете стойностите на x , за които те са взаимно перпендикулярни.
4. Дадени са върховете на триъгълника ABC: $A(2, 3)$, $B(3, 4)$ и $C(-1, -2)$. Намерете косинусите на ъглите при върховете B и C.

Обща задача

Дадени са върховете на триъгълника ABC: $A(1,2,4)$, $B(-1,2,4)$, $C(0,-2,-3)$.
а) Да се намерят дължините на страните на триъгълника.
б) Да се намерят координатите на вектора AM, където M е средата на страната BC.
в) Да се намерят координатите на векторите BN и CK, където N и K са средите на AC и AB съответно.
Решение: а) Намираме координатите на вектора $\overrightarrow{AB}(-1-1, 2-2, 4-4) = (-2,0,0)$. Дължината на страната AB е $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2+0^2+0^2} = 2$.
Дължините на другите две страни намерете самоостоятелно.

б) Координатите на точката M са $M(\frac{-1+0}{2}; \frac{2+(-2)}{2}; \frac{4+(-3)}{2}) = (\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.
Координатите на вектора $\overrightarrow{AM}$ са

$$\overrightarrow{AM}(-\frac{1}{2} - 1, 0 - 2, \frac{1}{2} - 4) = (-\frac{3}{2}, -2, -\frac{7}{2}).$$

Подточка в) решете самостоятелно.