МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 6.

Тема: Функция на една променлива.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част*
   - Определения.
   - Начини на задаване на функция.
   - Пресмятане на стойности на функции.
   - Определяне на дефиниционно множество и множество от стойности.
2. *Практическа част*
   - Задачи:
     - Подробно решени примери от дадените в теоретичната част теми.
     - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Определения

Дефинираме функция на една реална променлива като

1. зададем правило, което ни казава как да пресметнем стойността на функцията $f(x)$ за дадена реална стойност на аргумента x, и
2. да кажем за кои стойности на x това правило може да бъде приложено.

Множеството от числата, за които можем да пресметнем стойността на функцията се нарича *дефиниционно множество*.

Множеството от всички реални числа $f(x)$, които се получават, когато x приеме всички стойности от дефиниционното множество се нарича *множество от стойности* на функцията.

Правилото, което задаваме, ще е функция само, ако на всяко x от дефиниционното множество съпоставя единствена стойност $y = f(x)$ от множеството от стойности.

Пример: $y = x^2$. Дефиниционното множество е $(-\infty, \infty)$. Множеството от стойности е $[0, \infty)$. Правилото е, че на всяко реално число x се съпоставя x^2.

Начини на задаване

1. Таблично. Когато дефиниционното множество и множеството от стойности са крайни.

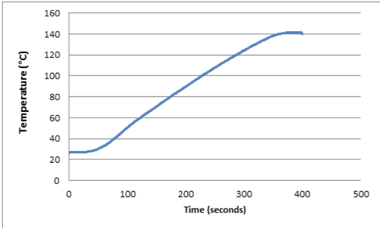
Пример: Оценките по дадена дисциплина на студентите от една група:

№	оценка
1	5
2	4
3	5
4	2
5	6

Начини на задаване

2. Графично. Когато дефиниционното множество и множеството от стойности са получени в резултат на наблюдения (измервания).

Пример: Температурата измерена с аналогов термометър за даден интервал от време.



Начини на задаване

2. Аналитично. Когато правилото може да се представи с формула, която определя дефиниционното множество и множеството от стойности.

Пример: Примери на аналитично зададени функции известни от средното училище.

$y = x^2 + 3x - 2$ - полиноми.
$y = \sqrt{x+2}$ - ирационални функции.
$y = \sin x,\ \ y = \cos x, y = \operatorname{tg} x,\ \ y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрични функции.
$y = a^x$ - показателни функции.
$y = \log_a x$ логаритмични функции.

Числови редици

Когато дефиниционното множество на една функция е множеството на естествените числа, я наричаме числова редица и означаваме най-често с

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$a_n, n = 1, 2, \ldots, \infty$$

1. пример Дадена е редицата $a_n = n^2 - 5n + 4$ за $n = 1, 2, \ldots$. Пресметнете първия, десетия и дванадесетия член на редицата.
   Решение:
   $a_1 = 1^2 - 5.1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0;$
   $a_{10} = 10^2 - 5.10 + 4 = 100 - 50 + 4 = 54;$
   $a_{12} = 12^2 - 5.12 + 4 = 144 - 60 + 4 = 88.$

Числови редици

2. Дадена е редицата $a_n = n^2 + 5n + 1$ за $n = 1, 2, \ldots$. Покажете, че редицата е растяща.

   Решение: Да разгледаме два последователни члена на редицата: $a_n = n^2 + 5n + 1$ и $a_{n+1} = (n+1)^2 + 5.(n+1) + 1$.

   Да образуваме разликата

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= ((n+1)^2 + 5.(n+1) + 1) - (n^2 + 5n + 1) \\
&= n^2 + 2n + 1 + 5n + 5 + 1 - n^2 - 5n - 1 \\
&= 2n + 7 > 0,
\end{aligned}
$$

   за всяко $n = 1, 2, \ldots$.

   Следователно $a_{n+1} > a_n$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$, т.е. редицата е растяща.

Решени примери

1. пример. Дадена е функцията $f(x) = 5x^3 + 3x - 1$ с дефиниционно множество $D = (-\infty, \infty)$. Пресметнете $f(-2), f(a), f(a+3)$.
   Решение:
   $f(-2) = 5.(-2)^3 + 3.(-2) - 1 = 5.(-8) - 6 - 1 = -40 - 6 - 1 = -47.$
   $f(a) = 5a^3 + 3a - 1.$
   $f(a+1) = 5.(a+1)^3 + 3.(a+1) - 1 = 5.(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 3a + 3 - 1 =$
   $5a^3 + 15a^2 + 15a + 5 + 3a + 3 - 1 = 5a^3 + 15a^2 + 18a + 7.$

Решени примери

2. пример. Дадена е функцията $y = \begin{cases} x-3, & x<0, \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x+3, & x>1 \end{cases}$
с дефиниционно множество $D = (-\infty, \infty)$.
Пресметнете $f(-2)$, $f(0,5)$, $f(2)$.
Решение: Ще пресметнем $f(-2)$. Виждаме, че $x=-2$ удовлетворява неравенството $x<0$. Следователно за пресмятане на стойността на функцията ще използваме съответната формула $x-3$. Така $f(-2) = -2-3 = -5$.
При пресмятането на $f(0,5)$ ще използваме формулата x^2, защото числото $x = 0,5$ удовлетворява неравенството $0 \le 0,5 \le 1$, което е вдясно от тази формула. Така $f(0,5) = 0,5^2 = 0,25$.
За $f(2)$ ще използваме формулата $x+3$ защото $x = 2 > 1$. Така $f(2) = 2+3 = 5$.

Определяне на дефиниционннто множество на функция

1. пример. Определете дефиниционното множество на функцията $y = \dfrac{x-3}{x+4}$.
   Решение: За функцията $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ единственото ограничение е, че знаменателят трябва да е различен от 0. Така намираме, че $x + 4 \neq 0$ или $x \neq -4$ и $D = (-\infty, -4) \bigcup (-4, \infty)$.
2. пример. Определете дефиниционното множество на функцията $y = \log_3(x-5)$.
   Решение: Поради това, че отрицателните числа и нулата нямат логаритми, то за функцията $y = \log_3(x-5)$ дефиниционното множество се определя от неравенството $x - 5 > 0$ или $x > 5$. Така $D = (5, \infty)$.

Решете самостоятелно следните примери:

1. Дадена е редицата $a_n = -3n^2 + n - 7$ за $n = 1, 2, \ldots$. Пресметнете a_2, a_5, a_{11}.
2. Проверете дали редицата $a_n = n^2 + 6n$, $n = 1, 2, \ldots$, е растяща.
3. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-4}$ с дефиниционно множество $D(-\infty, 4)\bigcup(4, \infty)$. Пресметнете $f(2), f(0), f(a-3)$.
4. Дадена е функцията $y = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2x^2 - 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ x + 5, & x > 2 \end{cases}$ с дефиниционно множество $D = (-\infty, \infty)$. Пресметнете $f(0)$, $f(1,5)$, $f(2)$.
5. Определете дефиниционните множества на функциите:

   а) $y = x^2 - 3x + 3$; б) $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 2x + 2}$;

   в) $y = \sqrt{2x - 4}$; г) $y = \log_2 x$; д) $y = \sqrt[3]{x + 4}$.