МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 7.

Тема: Граница на функция.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

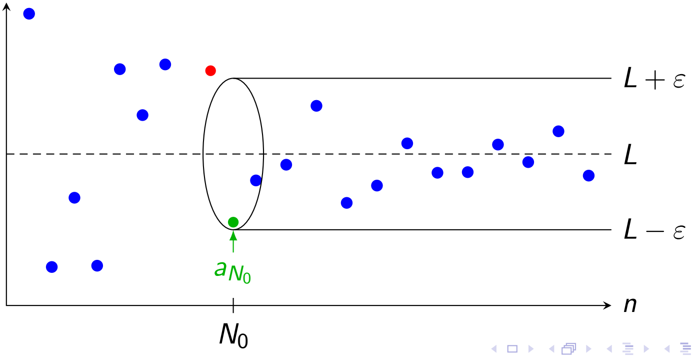
План на занятието

1. *Теоретична част*
    - Определения.
    - Граница на числова редица.
    - Дефиниране на Неперовото число e.
    - Пресмятане на гранци, когато аргументът клони към крайна стойност.
    - Пресмятане на граници, когато аргументът клони към безкрайност.
2. *Практическа част*
    - Задачи:
      - Подробно решени примери от дадените в теоретичната част теми.
      - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Граница на редица

Дефиниция

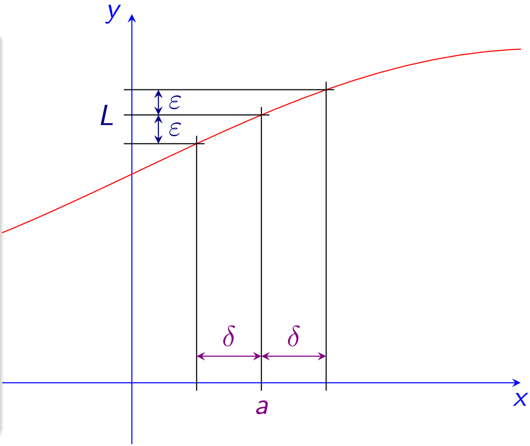
Ще казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *колни към* L *(или , което същото, редицата има за граница числото* L*), ако за всяко реално число* $\varepsilon > 0$*, членовете на редицата с номера по-големи от известен номер* N_0 *се съдържат в интервала* $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$*.*



Граница на функция

Дефиниция

Числото L е граница на функцията $f(x)$ при $x \to a$, (пишем $\lim_{x\to a} f(x) = L$), когато за всяко число $\varepsilon > 0$ можем да намерим число $\delta > 0$ такова, че за всички x от дефиниционното множество на f е изпълнено, от $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.



Аргументът клони към число и няма неопределеност

1. пример. Пресметнете границите $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x^2+2}$.

Решение: Първата стъпка при пресмятане на граница е да заместим променливата с граничната стойност и да пресметнем полученият аритметичен издраз, ако е възможно:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{0^2+1}{0^2+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

С това границата е намерена.

Разкриване на неопределеност от вида [0/0]

2. пример. Пресметнете границите $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Решение: При заместване на x с 3 получаваме

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{3^2-5.3+6}{3^2-9} = \frac{9-15+6}{9-9} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

В такъв случай имаме неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Разкриване на неопределеност от вида [0/0]

За да пресметнем границата разлагаме числителя и знаменателя както следва:
- За числителя решаваме уравнението $x^2 - 5x + 6 = 0$:
$D = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$. $x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2}$. $x_1 = 2, x_2 = 3$.
Така $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.
- За знаменателя използваме формулата за съкратено умножение и намираме $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$.

Сега преобразуваме дробта по следния начин:а

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}.$$

Накрая пресмятаме границата като използваме преобразуваната дроб

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}.$$

С това границата е намерена.

Пресмятане на граница когато аргументът клони към безкрайност

При пресмятане на граница, когато аргументът клони към безкрайност се използват следното правило:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{C}{x^p}=0$$

за произволна константа C и всяка положителна степен p.
За да приложим правилото, постъпваме по следния начин: Изнасяме най-високата степен на x в числителя и знаменателя пред скоби. Съкращаваме изнесените степени и след това прилагаме горното правило.

1. пример. Пресметнете границите

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x+4}{3x^2+x^3}$.

Пресмятане на граница когато аргументът клони към безкрайност

Решение: а)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}_{x}}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{2+0+0}{1+0}=2.$$

Пресмятане на граница, когато аргументът клони към безкрайност

Решение: б)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x+4}{3x^2+x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(\frac{5\cancel{x^2}}{\cancelto{x}{x^3}}+\frac{\cancelto{1}{x}}{\cancelto{x^2}{x^3}}+\frac{4}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{3\cancel{x^2}}{\cancelto{x}{x^3}}+\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{3}{x}+1} = \frac{0+0+0}{0+1} = 0.$$

Граница на редица

Когато търсим граница на числова редица $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ индексът n клони към безкрайност, затова при пресмятане на граница на редица използваме правилото за пресмятане на граница на функция, когато $x \to \infty$, което използвахме в предните примери.
Да се намери границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{4n^3+2}.$$

Да изнесем пред скоби най-високите степени на n в числителя и знаменателя. В числителя тя е n, а в знаменателя е n^3. Получаваме

$$\frac{n^2+1}{4n^3+2} = \frac{n(1+1/n^2)}{n^3(4+2/n^3)}$$
$$= \frac{1}{n^2}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n^3}}.$$

Граница на редица

Както вече видяхме $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Като използваме тази граница и теоремите за събиране, умножение, деление и коренуване на граници намираме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n^3}}=0.\frac{1+0}{4+0}=0.$$

С това границата е намерена.

Неперово число

Може да се докаже, че редицата $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ е сходяща. Границата и се означава с e, т.е. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Числото e е ирационално. С точност до 4 знак $e \approx 2,7182$.

Известно е в математиката като Неперово число. Логаритмичната система с основа числото e е много широко използвана в математиката.

Пресметнете границите

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+1}{x^2+2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x^3+4}{2x^3+2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2+2x+5}{4x^2+2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+1}{3x^2+1}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-x}{3x^2+4x-4}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+x^2+1}{x^2+x-7}$;

й) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+x^2+3}{-3x^2+x}$.