

МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН



ФАКУЛТЕТ "ФАРМАЦИЯ"

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 8.

Тема: Производна на функция.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

гр. Плевен 2020г.

План на занятието

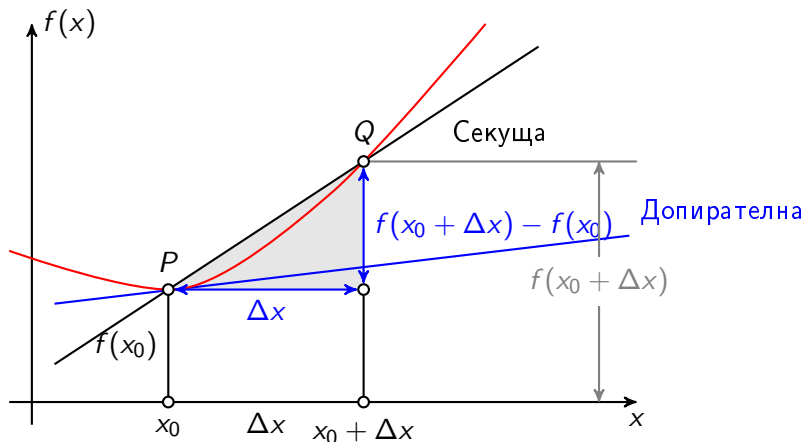
1 Теоретична част (Лекция 8.)

- Определения.
- Геометрично тълкуване на производната.
- Правила за диференциране.
- Таблица на производните на основните елементарни функции.

2 Практическа част

- Задачи:
 - Подробно решени примери от дадените в теоретичната част теми:
Непосредствено пресмятане с използване на таблицата;
Производни на произведение и частно;
Производна на съставна (сложна) функция.
 - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Геометрично тълкуване на производната



$$\text{Ъгловият коефициент на секущата} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \text{Ъгловия коефициент на допирателната} = f'(x_0).$$

Правила за диференциране

- Производна на сума $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
- Производна на разлика $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$;
- Производна на константа по функция $C \times f(x))' = C \times f'(x)$;
- Производна на произведение
 $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$;
- Производна на частно $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$;
- Производна на съставна функция $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Частни случаи на производна на съставна функция:

$$((g(x))^n)' = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x);$$

$$(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x); \quad (e^{ax})' = e^{ax} \cdot a$$

Таблица на производните на основни елементарни функции

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	x	1
x^n	nx^{n-1}	x^2	$2x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Степенни функции

1 примери. x^5 , $x^{3/4}$, x^{-4} , $x^{-1/2}$, $x^{0,3}$, $\frac{1}{x^6}$, $\sqrt[3]{x^4}$;

Решение:

$$(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4;$$

$$(x^{3/4})' = \frac{3}{4}x^{3/4-1} = \frac{3}{4} \cdot x^{-1/4};$$

$$(x^{-4})' = -4 \cdot x^{-4-1} = -4 \cdot x^{-5};$$

$$(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-3/2};$$

$$(x^{0,3})' = 0,3 \cdot x^{0,3-1} = 0,3 \cdot x^{-0,7};$$

$$\left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6 \cdot x^{-6-1} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7};$$

$$(\sqrt[3]{x^4})' = (x^{4/3})' = \frac{4}{3} \cdot x^{4/3-1} = \frac{4}{3} \cdot x^{1/3} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}.$$

Производна на линейна комбинация на функции

2 примери. а) $5\sqrt{x} + 2x^3 - 4$; б) $4\cotg x + 4 \operatorname{tg} x - 3$.

Решение:

а)

$$\begin{aligned}(5\sqrt{x} + 2x^3 - 4)' &= (5\sqrt{x})' + (2x^3)' - (4)' \\ &= 5 \cdot (\sqrt{x})' + 2 \cdot (x^3)' - (4)' = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \cdot 3x^2 - 0 \\ &= \frac{5}{2\sqrt{x}} + 6x^2;\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}(4\cotg x + 4 \operatorname{tg} x - 3)' &= (4\cotg x)' + (4 \operatorname{tg} x)' - (3)' \\ &= 4 \cdot (\cotg x)' + 4(\operatorname{tg} x)' - 3' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + 4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 0 \\ &= -\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Производна на произведение

3 примери. $x \cdot \cos x$, $e^x \cdot \operatorname{tg} x$, $10^x \cdot 5^x$, $(3x^2 + 5x + 3) \cdot \cos x$.

Решение:

$$\begin{aligned}(x \cdot \cos x)' &= x' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)' = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) \\ &= \cos x - x \cdot \sin x;\end{aligned}$$

$$(e^x \cdot \operatorname{tg} x)' = (e^x)' \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot (\operatorname{tg} x)' = e^x \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(10^x \cdot 5^x)' = (50^x)' = 50^x \ln 50,$$

$$\begin{aligned}& ((3x^2 + 5x + 3) \cdot \cos x)' \\ &= (3x^2 + 5x + 3)' \cdot \cos x + (3x^2 + 5x + 3) \cdot (\cos x)' \\ &= (3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0) \cdot \cos x + (3x^2 + 5x + 3) \cdot (-\sin x) \\ &= (6x + 5) \cos x - (3x^2 + 5x + 3) \sin x.\end{aligned}$$

Производна на частно

4 примери. а) $\frac{x^2 + x - 3}{x + 4}$; б) $\frac{\sin x}{\cos x}$.

Решение:

$$\text{а) } \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 4} \right)' = \frac{(x^2 + x - 3)' \cdot (x + 4) - (x^2 + x - 3) \cdot (x + 4)'}{(x + 4)^2} =$$

$$\frac{(2x + 1)(x + 4) - (x^2 + x - 3) \cdot 1}{(x + 4)^2} =$$

$$\frac{2x^2 + 8x + x + 4 - x^2 - x + 3}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x + 7}{(x + 4)^2};$$

$$\text{б) } \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot 4(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Производна на съставна функция

5 примери. а) $(5x + 2)^8$; б) e^{3x^2+4} ; в) $\sqrt{x^2 + 4}$.

Решения:

$$\text{а) } ((5x + 2)^8)' = 8 \cdot (5x + 2)^{8-1} \cdot (5x + 2)' = 8 \cdot (5x + 2)^7 \cdot (5 \cdot 1 + 0) = 8(5x + 2)^7 \cdot 5 = 8 \cdot 5 \cdot (5x + 2)^7 = 40(5x + 2)^7;$$

$$\text{б) } (e^{3x^2+4})' = e^{3x^2+4} \cdot (3x^2 + 4)' = e^{3x^2+4} \cdot (3 \cdot 2x + 0) = 6x \cdot e^{3x^2+4};$$

$$\begin{aligned} \text{в) } (\sqrt{x^2 + 4})' &= ((x^2 + 4)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{1/2-1} \cdot (x^2 + 4)' = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2} \cdot (2x + 0) = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 2x(x^2 + 4)^{-1/2} = \\ &= x \cdot (x^2 + 4)^{-1/2} = \frac{x}{(x^2+4)^{1/2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}. \end{aligned}$$

Задачи за самостоятелно решаване

- 1 а) $e^x \cdot \sin x$; б) $x^3 \cdot \ln x$; в) $\sin x \cdot \cos x$; $\log_4 x \cdot x^2$;
- 2 а) $\frac{x+1}{x-1}$; б) $\frac{5}{x-3}$; в) $\frac{x^2+4}{x-2}$; г) $\frac{\ln x}{x+2}$; д) $\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$; е) $\frac{e^x+2x}{x+1}$;
- 3 а) $(x+3)^{10}$; б) $\sin^6 x$; в) $\cos^{1/2} x$; г) e^{5x+3} ; д) $e^{\sin x}$.