МЕДИЦИНСКИ УНИВЕРСИТЕТ-ПЛЕВЕН

ФАКУЛТЕТ “ФАРМАЦИЯ”

ЦЕНТЪР ЗА ДИСТАНЦИОННО ОБУЧЕНИЕ

ВИСША МАТЕМАТИКА - Упражнение No. 9.

Тема: Приложения на производните.

Разработил: проф. Косто Митов д.мат.н.

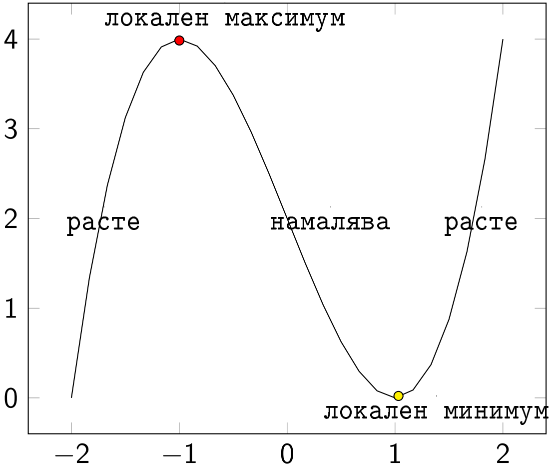
гр. Плевен 2020г.

План на занятието

1. *Теоретична част (Лекция 9.)*
    - Достатъчни условия за растене и намаляване на функция в даден интервал.
    - Необходими условия за съществуване на локален екстремум (минимум, максимум).
    - Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум.
    - Достигане на най-малка и най-голяма стойност в краен затворен интервал.
    - Правила на Лопитал за разкриване на неопределености.
2. *Практическа част*
    - Задачи:
      - Подробно решени примери от дадените в теоретичната част теми:
      Намиране на интервалите на монотонност на дадена функция;
      Намиране на точките в които дадена функция има локален екстремум;
      Пресмятане на стойностите на намерените локални екстремуми;
      Разкриване на неопределености с правилата на Лопитал.
      - Задачи за самостоятелно решаване по време на упражнението.

Правила

1. Ако в даден интервал (a, b) производната $f'(x)$ е положителна, то в този интервал функцията $f(x)$ е монотонно растяща;
2. Ако в интервала (a, b), $f'(x)$ е отрицателна, то в този интервал функцията $f(x)$ е намаляваща;
3. За да има функцията f локален максимум в точката x_0 е достатъчно да има интервал $(a, b) \subset D$ такъв, че $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (a, x_0)$ и $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0, b)$;
4. За да има функцията f локален минимум в точката x_0 е достатъчно да има интервал $(a, b) \subset D$ такъв, че $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (a, x_0)$ и $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0, b)$.


локален максимум
4
3
2
1
0
расте
намалява
расте
локален минимум
−2
−1
0
1
2

Монотонност и екстремуми-примери

1. пример. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $y = -3x^2 + 6x + 4$.
Решение: Дефиниционното множество на функцията е $(-\infty, \infty)$.
Пресмятаме производната $y' = -3.2x + 6.1 + 0 = -6x + 6$.
Решаваме уравнението $y' = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow -6x = -6$
$\Leftrightarrow x = \frac{-6}{-6} = 1$.
Сега ще намерим интервалите, в които $y' > 0$ и тези, в които $y' < 0$. За това нанасяме корена на уравнението $y' = 0$ на числовата ос и я разделяме на два интервала.
В десния интервал $(1, \infty)$ се поставя знака на коефициента пред x в y', в случая (-), вървейки наляво, при преминаване през *един* корен на уравнението $y' = 0$ сменяме знака *един* път. Така в интервала $(-\infty, 1)$ поставяме знак $(+)$.

Монотонност и екстремуми-примери

$+$ расте $\qquad\qquad$ $-$ намалява

$x = 1$, локален максимум

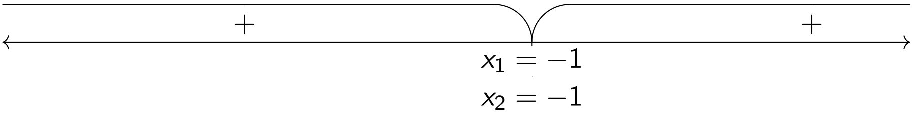
Следователно:
В интервала $(-\infty, 1)$, $y' > 0$ и в този интервал функцията е растяща;
В интервала $(1, \infty)$, $y' < 0$ и в този интервал функцията е растяща.
Като използваме правила 2. и 3. виждаме, че при $x = 1$ функцията има локален максимум.
Да пресметнем стойността на този максимум
$y_{max} = y(1) = -3.1^2 + 6.1 + 4 = -3 + 6 + 4 = 7.$

Монотонност и екстремуми-примери

2. пример. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 4$.

Решение: Дефиниционното множество на функцията е $(-\infty, \infty)$.
Пресмятаме първата производна
$y = \frac{1}{3}.(x^3)' + (x^2)' + x' + 4' = \frac{1}{3}.3x^2 + 2x + 1 + 0 = x^2 + 2x + 1$.
Решаваме уравнението $y' = 0$, т.е. $x^2 + 2x + 1 = 0$. Корените на това уравнение са $x_1 = x_2 = -1$. Нанасяме на числовата ос двукратния корен -1 и определяме знака на производната.
В десния интервал $(-1, \infty)$ поставяме знак $+$, защото коефициентът пред x^2 в производната е положителен $(+1)$. Като вървим наляво в точката -1 ние прескачаме наведнъж двата корена на производната. За всеки корен обръщаме знака един път. Така заради двата корена ще променим знака 2 пъти.
Следователно, в интервала $(-\infty, -1)$ поставяме пак знак $(+)$.

Монотонност и екстремуми-примери



Получихме, че $y' > 0$ за всяко $x \in (-\infty, -1)$ и за всяко $x \in (-1, \infty)$.
Това означава, че функцията y е растяща в цялото си дефиниционно множество $(-\infty, \infty)$.
Поради това, че няма промяна на монотонността на функцията в точката $x = -1$, функцията няма екстремум в тази точка.

Монотонност и екстремуми-примери

3. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $y = \dfrac{e^x}{x^2 + x + 1}$.
Решение: Дефиниционното множество се определя от условието знаменателят $x^2 + x + 1 \neq 0$. Да проверим дали уравнението $x^2 + x + 1 = 0$ има реални корени. Пресмятаме дискриминантата $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Следователно уравнението няма реални корени, т.е. $x^2 + x + 1 \neq 0$ за всяко $x \in (-\infty, \infty)$. Така дефиниционното множество е $(-\infty, \infty)$.

Монотонност и екстремуми-примери

Пресмятаме производната

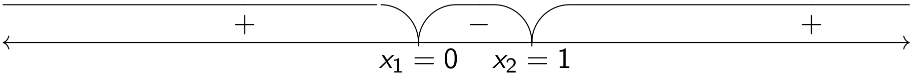
$$\begin{aligned} y' &= \frac{(e^x)'.(x^2+x+1) - e^x.(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{e^x.(x^2x+1) - e^x.(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(x^2+x+1-2x-1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

Решаваме уравнението $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0.$

Корените на това непълно квадратно уравнение $x^2 - x = 0$ се получават от $x.(x-1) = 0$, $x_1 = 0, x_2 = 1$. Множителят $e^x > 0$ и знаменателят $(x^2+x+1)^2 > 0$ за всяко x. Следователно, знакът на производната се определя от знака на $x^2 - x$.

Монотонност и екстремуми-примери

Нанасяме корените $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ на числоватта ос и поставяме знак $+$ в най-десния интервал $(1, \infty)$. След това поставяме знак $(-)$ в интервала $(0, 1)$ знак $(+)$ в интервала $(-\infty, 0)$.



лок. макс. лок. мин.

Следователно, функцията е растяща в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$ и е намаляваща в интервала $(0, 1)$.

Като приложим правила 2. и 3. установяваме, че в точката $x = 0$ фунцията има локален максимум, а в точката $x = 1$ функцията има локален минимум. Пресмятаме стойностите им:

$$y_{max} = y(0) = \frac{e^0}{0^2 + 0 + 1} = 1 \text{ и } y_{min} = y(1) = \frac{e^1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{e}{3}.$$

Задачи за самостоятелно решаване.

Намерете интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функциите:

1. $y = x^2 - 5x + 6,\ y = x^2 + 5,\ y = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 8,\ y = -\frac{x^2}{2} + 3x + 4;$
2. $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 8,\ y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 4,\ y = x^3 - 27x + 4;$
3. $y = x^2 e^x,\ y = (3x + 2)e^{2x},\ y = \frac{e^x}{x^2 - x + 1};$

Неопределености от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на точката c и имат производни в тази околност. Нека границата $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ е неопределена. Тогава, ако съществува границата $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то съществува и границата $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ и при това

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на точката c и имат производни в тази околност. Нека границата $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ е неопределена. Тогава, ако съществува границата $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то съществува и границата $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ и при това

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Примери $\left[\frac{0}{0}\right]$

1. пример. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Решение: Заместваме x с 1 и получаваме:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{1^2-1}{1^2-3.1+2} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Прилагаме първото правило на Лопитал:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}\left[\frac{0}{0}\right] &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)'}{(x^2-3x+2)'} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2x}{2x-3} = \frac{2.1}{2.1-3} = \frac{2}{-1} = -2.
\end{aligned}$$

Примери $\left[\frac{0}{0}\right]$

2. пример. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.

Решение: Заместваме x с 0 и получаваме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{e^0-1-0}{0^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Прилагаме първото правило на Лопитал и получаваме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{e^0-1}{2.0}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Отново имаме неопределеност от същия вид. Прилагаме повторно правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Задачи за самостоятелно решаване

1. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 5x}{2 - e^{2x}}$.
2. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 4x}{5\sin x}$.
3. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{2x^2 - 4\sin x}$.
4. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - 2x}{1 - e^{3x}}$.